L'infinito in matematica

Marco Bramanti

Dipartimento di Matematica

Politecnico di Milano

16 novembre 2023

Politecnico di Torino

Dipartimento di Scienze Matematiche "G. L. Lagrange"

DISMA Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange

Matematica LiberaMente

“La matematica è la scienza dell’infinito”. Hermann Weyl.

L’infinito dell’universalità

“…in UN triangolo…”

L’infinito potenziale
Procedimenti infiniti

Qual è il numero più grande?

Brancusi: la colonna infinita

Euclide (300 a.C.)

«Esistono infiniti numeri primi»
(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …)

“I numeri primi sono più numerosi di qualunque assegnata quantità di numeri primi.” (Euclide, libro IX, Prop. 20).

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che i numeri primi siano un numero finito, allora possiamo elencarli tutti:

$$p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Consideriamo ora il numero

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Il numero m è maggiore di ciascuno dei p_i e quindi è diverso da ciascun numero primo (l’elenco dei numeri primi si suppone completo), in particolare ***m* non è primo**.
Il numero m non è divisibile per p_1 perché

$$m = p_1 \cdot (p_2 \cdot \dots \cdot p_n) + 1 = p_1 \cdot q_1 + 1 \qquad \text{(Es.: 21=5 x 4+1)}$$

Il numero m non è divisibile per p_2 perché

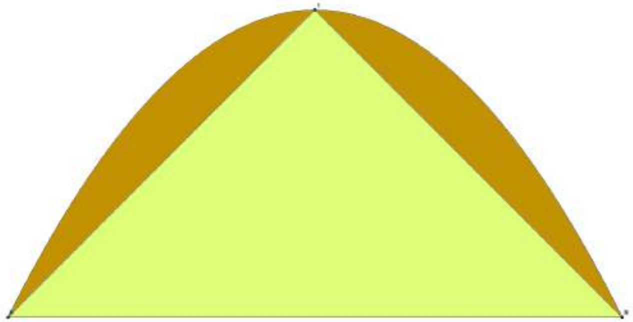
$$m = p_2 \cdot (p_1 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n) + 1 = p_2 \cdot q_2 + 1$$

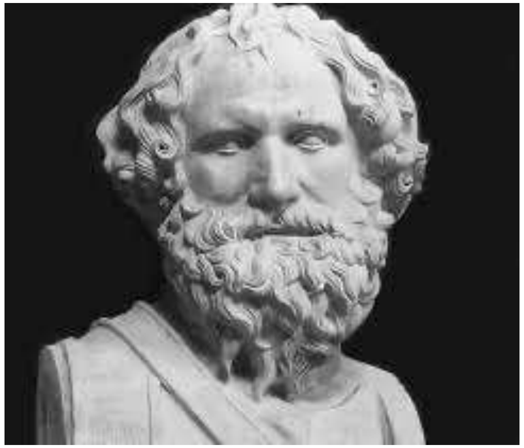
e così via: il numero m non è divisibile per *nessun* numero primo, quindi ***m* è primo**.
(Nota: Euclide ha dimostrato in precedenza che se un numero non è primo, allora ha almeno un divisore *primo*).
Assurdo. Perciò i numeri primi sono infiniti. □

In *una slide* abbiamo dimostrato l’esistenza di infiniti oggetti!!!

Archimede (287 a.C. – 212 a.C.)
e la misura delle figure a contorni curvilinei.
«Sulla quadratura della parabola»

*«Archimede saluta Dositeo. (…)
Ho voluto comunicarti un certo teorema geometrico che non era stato investigato prima ma è stato ora investigato da me (…).
Perché qui si mostra che ogni segmento limitato da una retta e una sezione di cono con angolo retto [una parabola] è 4/3 del triangolo che ha la stessa base e la stessa altezza del segmento».*

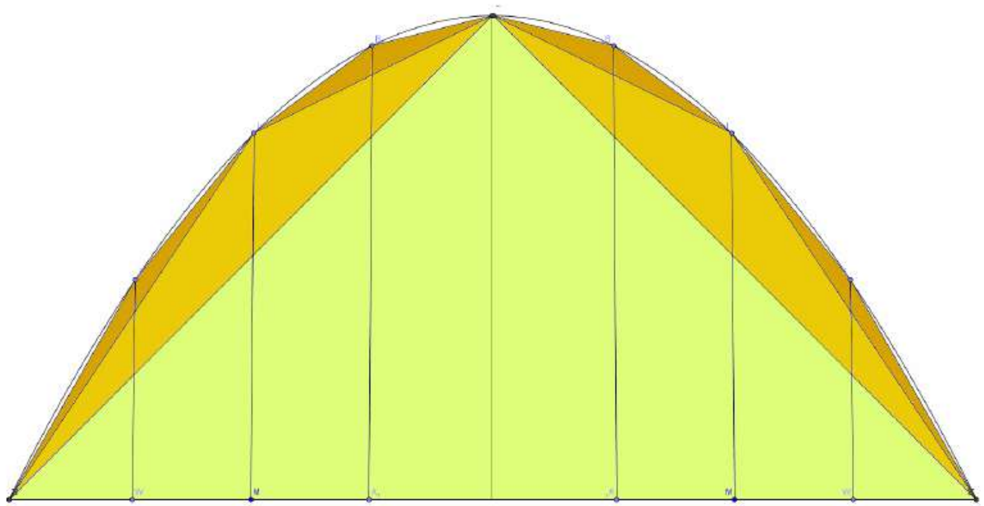




- E' un risultato elegante e profondo: relazione semplice tra l'area di una *figura a contorno curvilineo* e l'area di un triangolo.
- La matematica greca, e Archimede in particolare, hanno saputo stabilire rigorosamente risultati che, nel linguaggio della matematica moderna, ricadono nell'ambito del *calcolo infinitesimale*.

La “quadratura della parabola” di Archimede

L’idea di Archimede è quella di “esaurire” l’area del segmento di parabola con la somma delle aree di tanti triangolini contenuti in esso, con una costruzione iterativa così:



Sia T_1 l’area del triangolo giallo;
T_n l’area totale dei 2^{n-1} triangolini che si aggiungono al passo n-esimo;
P_n l’area totale del poligono unione di tutti i triangoli costruiti *fino* al passo n-esimo.
Archimede dimostra, con una sequenza di 23 proposizioni, che

$$\mathcal{P}_n + \frac{1}{3}\mathcal{T}_n = \frac{4}{3}\mathcal{T}_1.$$

Ora, detto con linguaggio moderno:
P_n tende all’area A del segmento di parabola, per $n \to \infty$
T_n tende a zero per $n \to \infty$; quindi *l’area del segmento di parabola è uguale a* 4/3 T_1.
Archimede arriva alla stessa conclusione senza usare il linguaggio dei limiti: con 2 dimostrazioni per assurdo, mostra che l’area A non può essere né > né < di 4/3 T_1 .
Per trovare l’assurdo, sfrutta il fatto che per n abbastanza grande A-P_n è minore di qualsiasi prefissata area («metodo di esaustione») e T_n è minore di qualsiasi prefissata area (facile).

La nascita del calcolo infinitesimale nel 17° secolo

Gottfried Wilhelm
von Leibniz
(1646-1716)

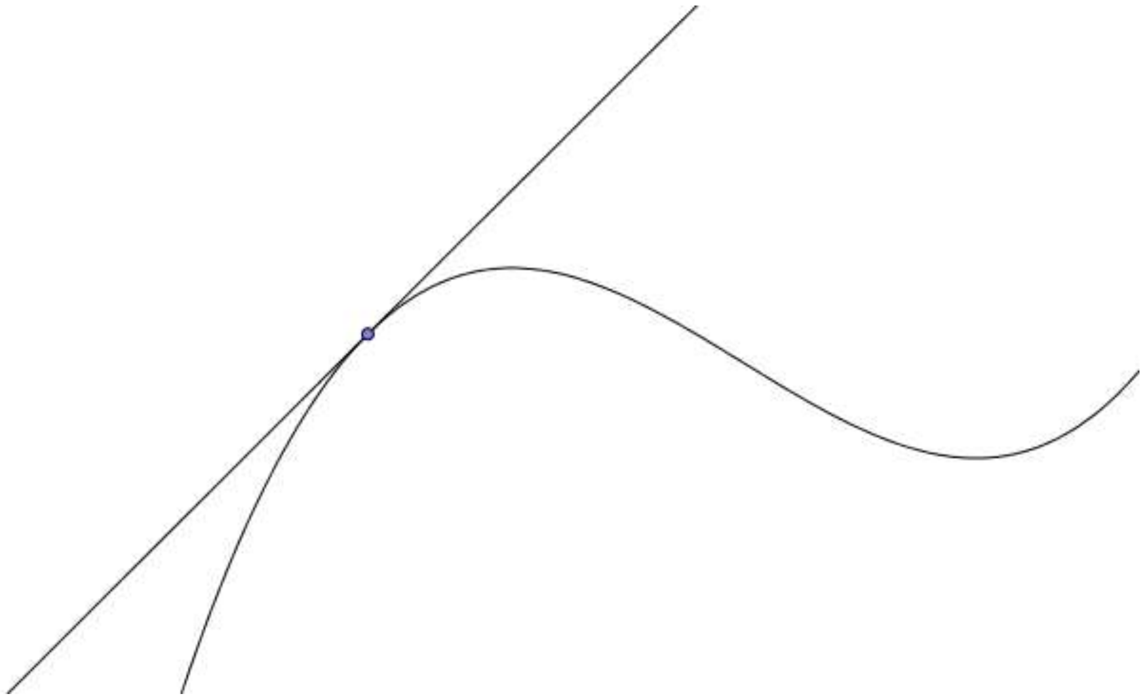
Isaac Newton
(1643-1727)

"L'invenzione del calcolo infinitesimale,
accanto alla geometria euclidea,
è la più grande creazione in tutta la matematica."
(Morris Kline)

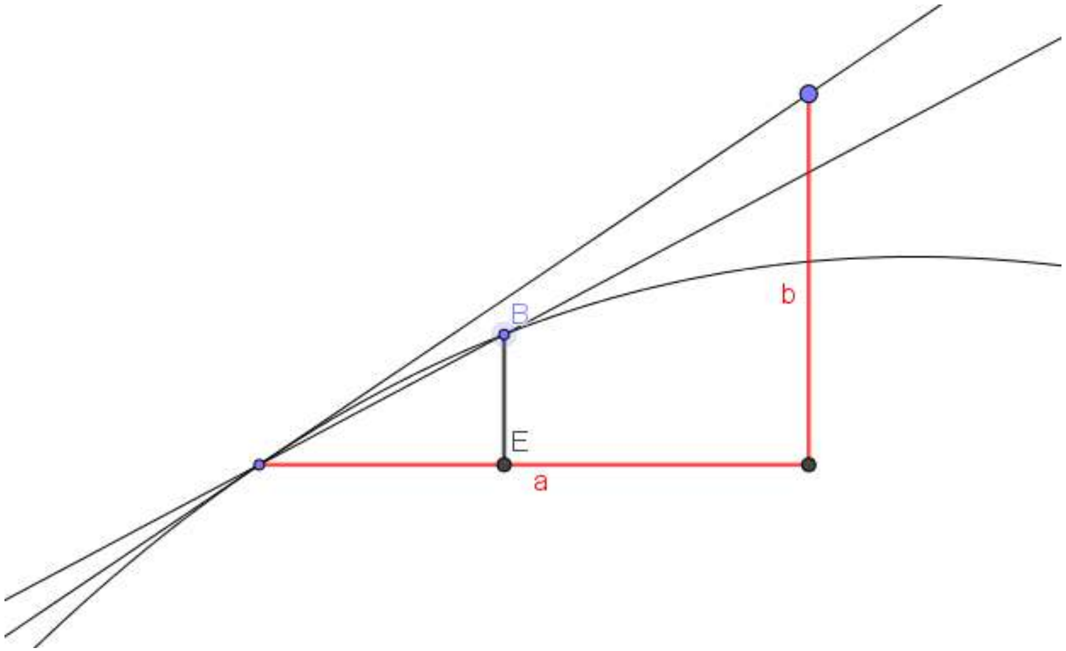
I problemi all’origine del calcolo differenziale

Cos’è la velocità istantanea
di un oggetto in moto?

Cos’è la retta tangente a
una curva in un punto?



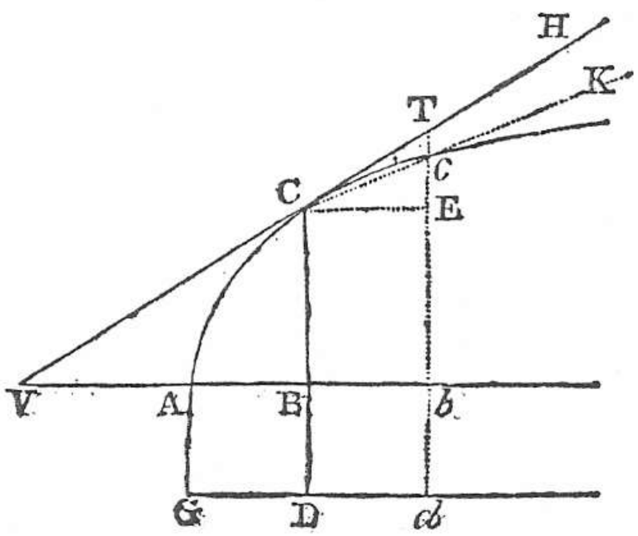
La traduzione analitica della definizione geometrica di tangente



$m = b/a$

La pendenza della retta tangente può essere calcolata come *limite delle pendenze delle rette secanti*, cioè come limite del rapporto tra i cateti dei triangolini delle secanti.
Questo procedimento infinito, calcolare un numero come limite di rapporti di cateti sempre più piccoli, porta alla definizione del concetto di *derivata* di una funzione, in analisi matematica,
ed è lo stesso che sta alla base della definizione di velocità istantanea in fisica (rapporto tra spazi percorsi e intervalli di tempo impiegati, sempre più brevi).
Il problema della tangente e il problema della velocità istantanea portano allo stesso concetto analitico (derivata), parte essenziale del linguaggio della scienza moderna.

Newton, *Introductio ad Quadratura Curvarum*
(scritta nel 1676, pubblicata nel 1704,
contiene la “definizione” di derivata).



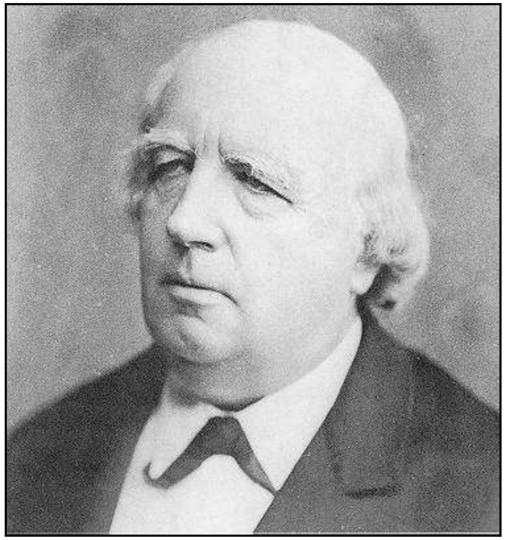
I pionieri del calcolo infinitesimale non introdussero un concetto di limite e non seppero quindi rendere rigorosa la definizione di derivata (o di tangente).

“Si conduca la retta Cc e la si prolunghi fino a K. Ritorni l'ordinata bc al suo luogo iniziale BC, e andando a coincidere i punti C e c, la retta CK coinciderà con la tangente CH, e il triangolo evanescente CEc, nella sua ultima forma, svanirà simile al triangolo CET, e i suoi lati evanescenti CE, Ec e Cc staranno tra loro, in ultimo, come stanno tra loro i lati dell'altro triangolo CET, CE, ET e CT, e perciò in questo rapporto stanno le flussioni delle linee AB, BC e AC”.

La rigorizzazione dell'analisi nell'800

Nell'800 si arriverà a un concetto rigoroso di limite e al fondamento di tutta l'analisi matematica su questo concetto (e su una teoria rigorosa dei numeri reali).

Augustin-Louis Cauchy
(1789-1857)



Karl T. W. Weierstrass
(1815-1897)

Cauchy dà una definizione «discorsiva» di limite, nel suo Corso di Analisi (1821), Lezioni sul Calcolo Differenziale (1829), scritti per l'Ecole Polytechnique. Il concetto chiave è quello di *grandezza variabile* (funzione o variabile indipendente).

Weierstrass (lezioni all'università di Berlino, dal 1859) dà la epsilon-delta definizione di limite. Il concetto chiave è quello di implicazioni tra *disuguaglianze*.

L’infinito attuale: insiemi infiniti

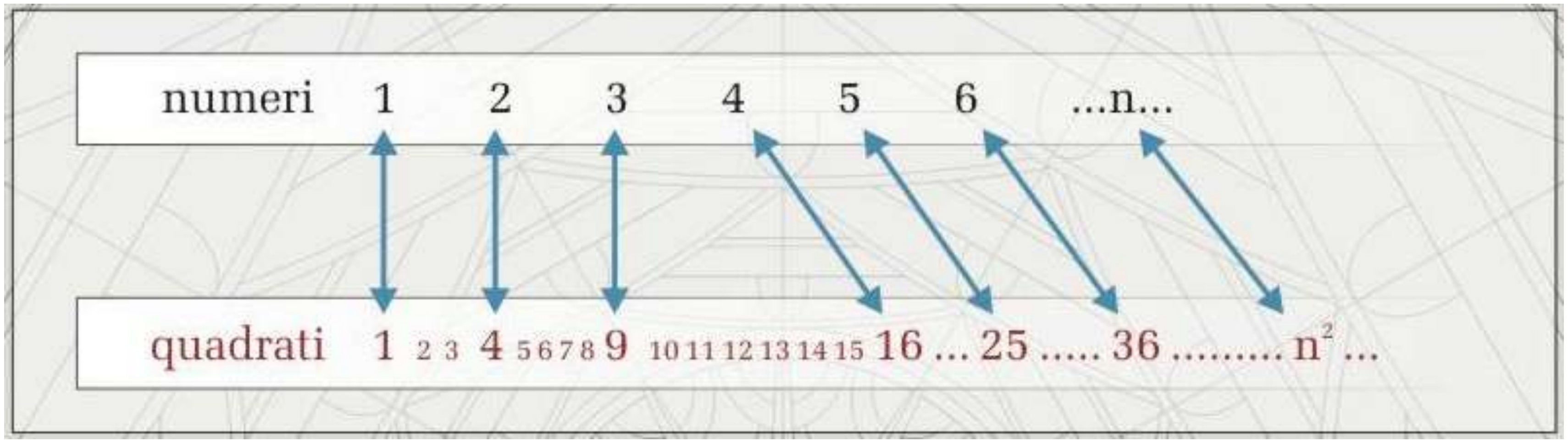
E’ possibile confrontare due insiemi infiniti e dire che uno è più numeroso dell’altro, o che sono ugualmente numerosi?
Cosa significa “uguale numerosità”?

Uguale numerosità e corrispondenza biunivoca

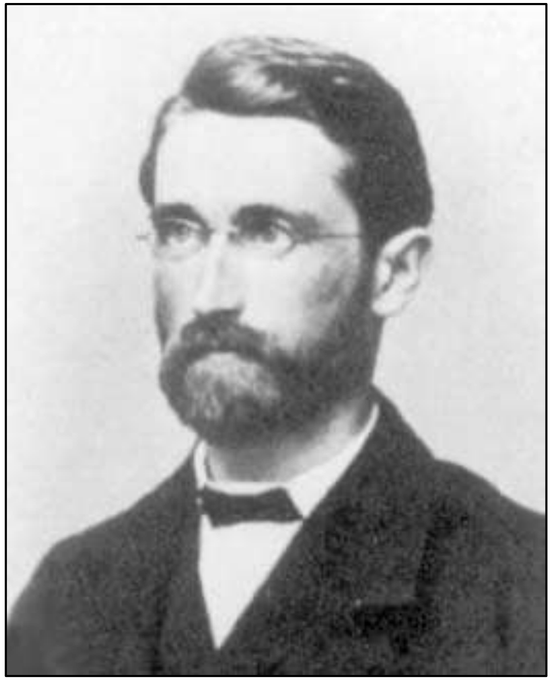
Galilei e la numerosità degli insiemi infiniti

"Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, *infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione,* ***gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate****".*

(Galileo Galilei "Discorsi e dimostrazioni matematiche attorno a due nuove scienze", giornata prima. 1638).



Dedekind e la definizione di insieme infinito



Richard Dedekind
(1831-1916)

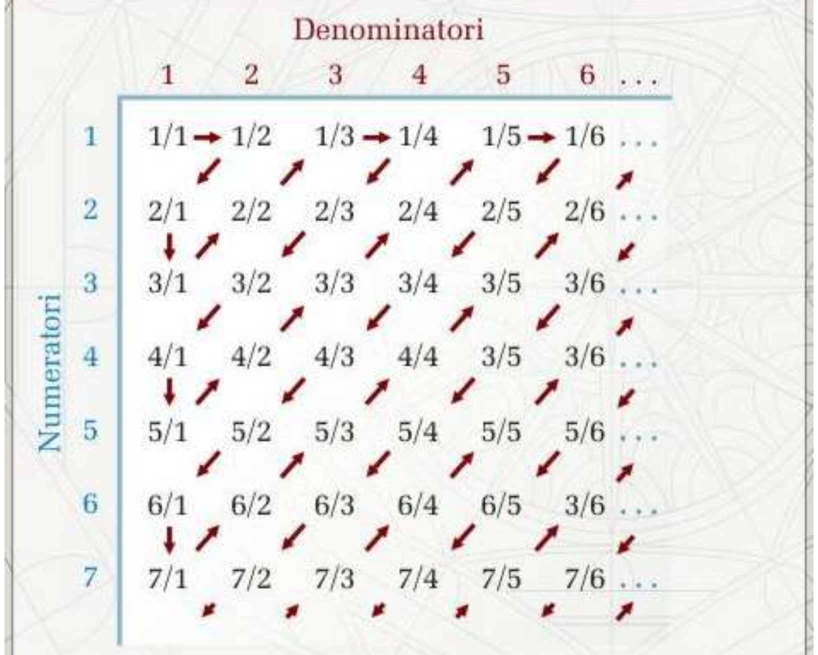
“Un insieme **si dice infinito** quando contiene un sottoinsieme proprio con cui è in corrispondenza biunivoca”.
(Dedekind, “Natura e significato dei numeri”, 1887)

Cantor e la cardinalità degli insiemi infiniti

Georg Cantor
(1845 - 1918)

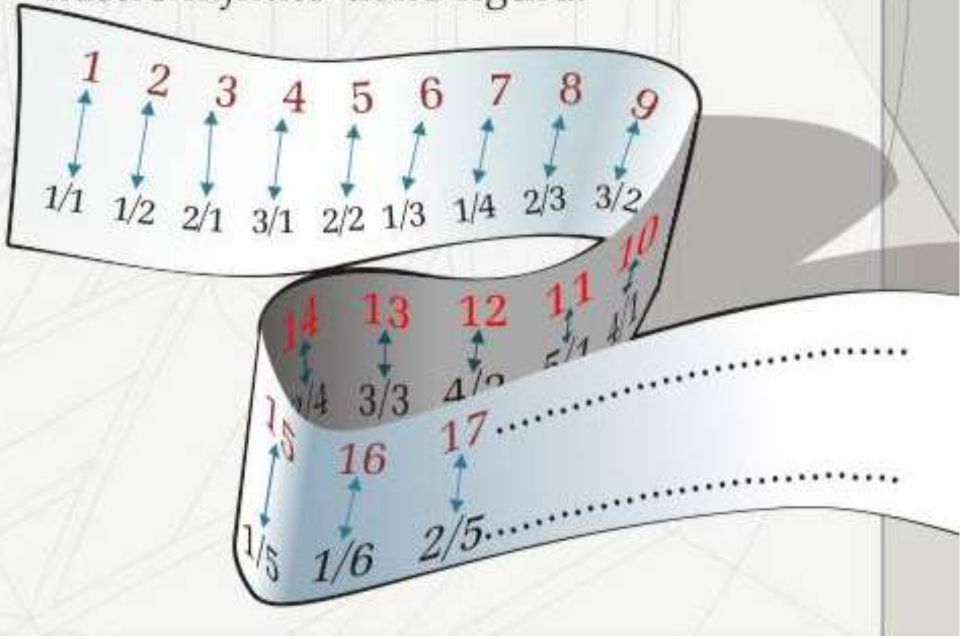
- Definizione di “insiemi di uguale cardinalità”
- Definizione di “card A > card B”
- Un insieme si dice *numerabile* se ha la stessa cardinalità dell’insieme **N** dei numeri naturali (1, 2, 3…)
- La cardinalità numerabile è la più piccola cardinalità infinita.
- Un insieme infinito è numerabile se a ciascun suo elemento si può assegnare (biunivocamente) un «numero d’ordine» (come quando si è in fila a uno sportello).
- L’insieme **Q** dei numeri razionali (cioè le frazioni) è numerabile.

Numerabilità di Q



La lettura diagonale mostra che si possono "numerare" tutte le frazioni! Dunque, sorprendentemente, anche l'insieme delle frazioni è numerabile.

Mettiamo "in fila" tutte le frazioni seguendo le frecce tracciate sulla tabella. Passiamo da tutte le caselle e "preleviamo" la frazione, formando il *nastro infinito* della figura.



Ma allora ogni insieme infinito è numerabile?

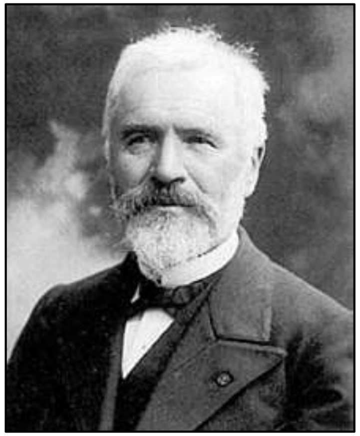
Cantor e la cardinalità degli insiemi infiniti

Georg Cantor
(1845 - 1918)

- L’insieme **R** dei numeri reali *non è numerabile* (è un infinito “più grande”).
- La cardinalità di **R** si dice *cardinalità del continuo*, e corrisponde a quella dell’insieme di tutti i punti di una retta (o di un piano, o dello spazio).
- Ci sono cardinalità ancora più grandi, secondo una “scala degli infiniti” che non ha limite.
- Gli studi di Cantor hanno “domato l’infinito attuale” e spiegato il paradosso di Galilei.

Cardinalità e misura

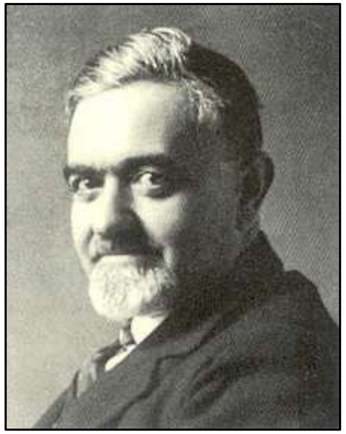
Agli inizi del ‘900 è nata una nuova disciplina matematica astratta, nota come *teoria della misura*, che generalizza il concetto di lunghezza, area, volume, ed è a fondamento del moderno *calcolo integrale*.



Camille Jordan
(1838-1922)

Emile Borel
(1871-1956)

Henry Lebesgue
(1875-1941)

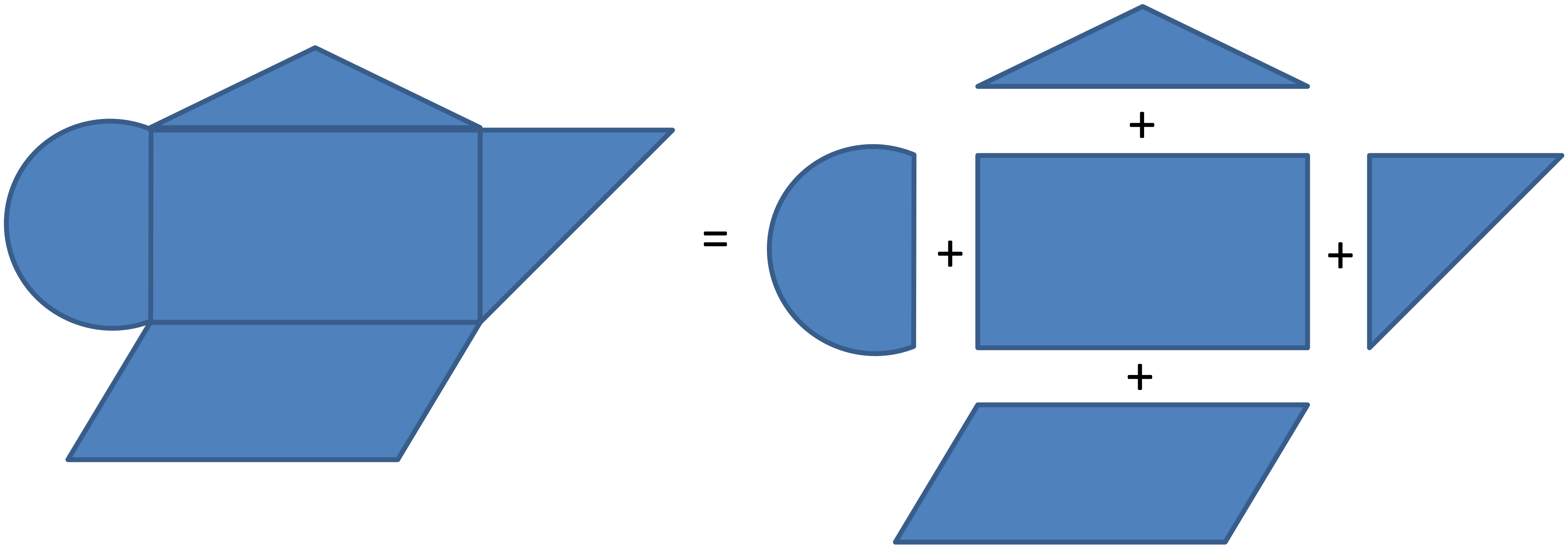


Giuseppe Vitali
(1875-1932)

William H. Young
(1863-1942)

Teoria della misura

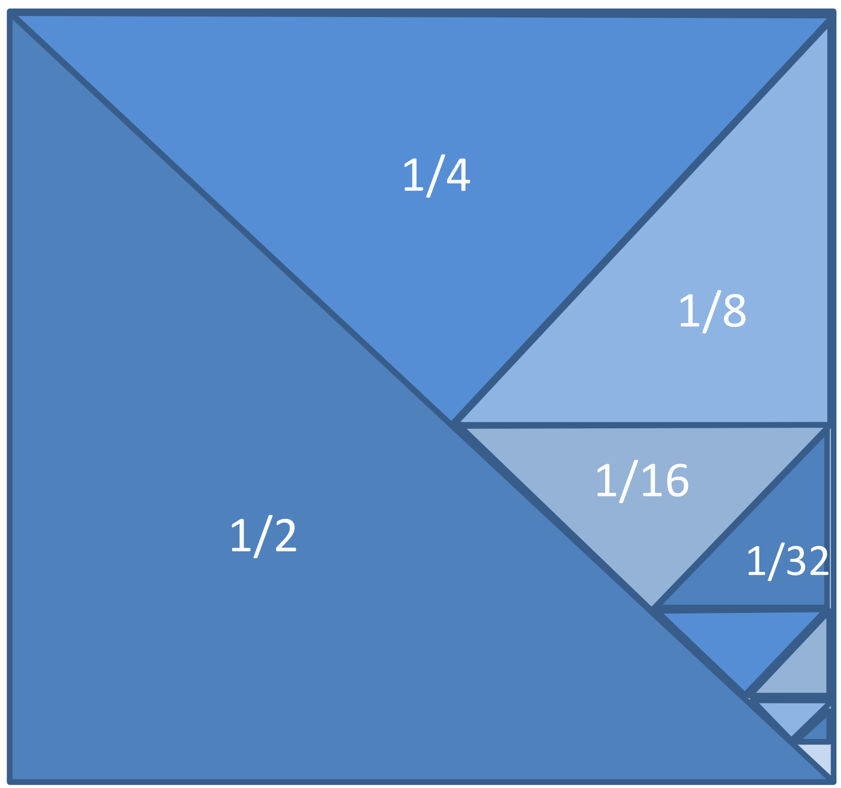
Sappiamo che l'area è additiva:
l'area di una figura composta da tanti pezzi (non sovrapposti)
è la somma delle aree dei singoli pezzi:



Ma questo è vero anche quando i pezzi sono in numero infinito?
Dipende da «quanto numerosi» sono gli infiniti pezzi!

La somma di infinite quantità sempre più piccole (ad es. le aree dei pezzetti che compongono la figura) può dare un risultato finito?

Esempio. Quadrato di 1 m. di lato. Area = 1 m^2.
Lo dividiamo in infiniti pezzi triangolari:



La figura suggerisce che: ½ + ¼ + 1/8 + 1/16+ 1/32+ … =1
In questo caso **è vero che l'area del tutto è somma delle (infinite) aree delle parti**.

E se le parti sono un'infinità non numerabile?

Esempio. Consideriamo un segmento di lunghezza 1.

Possiamo vederlo come unione dei suoi *infiniti punti*.
I punti di un segmento sono una infinità non numerabile.
(«cardinalità del continuo», come quella dell'insieme dei numeri reali).
Ogni punto ha lunghezza zero!
Se la lunghezza fosse additiva anche in questo caso si avrebbe:
(somma di infiniti zeri) = 1.

Conclusione: la misura non può essere additiva anche quando i «pezzi» sono un'infinità non numerabile.

Definizione. Si chiama *misura* una legge che ad ogni insieme di un certo tipo (che vogliamo misurare) associa un numero non negativo (detto la misura dell'insieme) rispettando la proprietà di numerabile additività.

Solo riflettendo sulle "finezze" dei confronti tra insiemi infiniti la matematica moderna ha saputo cogliere le proprietà essenziali del *misurare*.

Le sfide della cardinalità

Torniamo alla cardinalità degli insiemi numerici:

N	(naturali: 1, 2, 3, 4, ….)	è numerabile
Q	(razionali: 0, 1, 2, 3, …, -1, -2,…, ½, -1/3, 2/3,…,5/4,…)	è numerabile
R	(reali: numeri razionali e irrazionali) (i punti della retta)	non è numerabile

«numerabile» è la più piccola cardinalità infinita.
La cardinalità di R (si dice anche «del continuo») è maggiore di quella di N.
Ma esistono **cardinalità intermedie tra queste due**?

David Hilbert
(1862 - 1943)

David Hilbert al Congresso di Parigi del 1900 pone il problema di dimostrare l' «ipotesi del continuo»:

"Non esiste una cardinalità intermedia tra N e R".

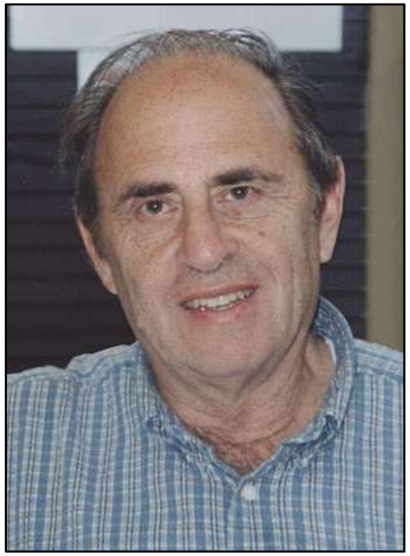
Sembrava «solo» un problema tecnicamente difficile, invece…

Cardinalità e indecidibilità

Kurt Gödel
(1906-1978)

Nel 1940 Kurt Gödel dimostrò che, utilizzando la teoria assiomatica degli insiemi "standard" è impossibile dimostrare la falsità dell'ipotesi del continuo.

Nel 1963 Paul Cohen dimostrò che, sempre utilizzando la teoria assiomatica degli insiemi, è impossibile dimostrare la verità dell'ipotesi del continuo.



Paul Cohen
(1934 - 2007)

Si dice perciò che l'ipotesi del continuo è una proposizione formalmente indecidibile della teoria degli insiemi:
una proposizione che "dovrebbe" essere vera oppure essere falsa, ma è impossibile dimostrare che sia vera ed è impossibile dimostrare che sia falsa.

Affacciandoci sull'infinito…

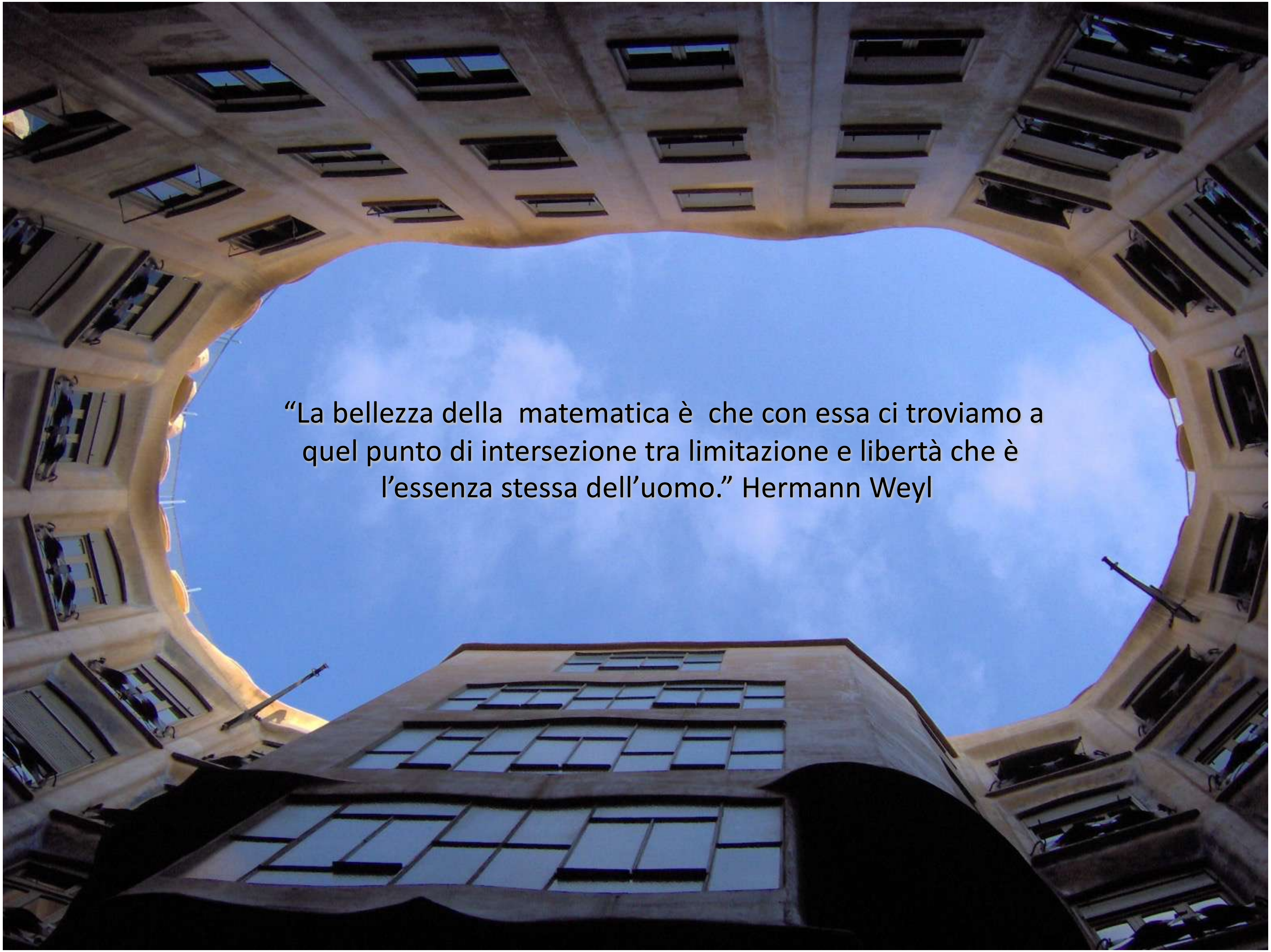
Affacciandoci sull’infinito…

“La matematica è la scienza dell’infinito”. Hermann Weyl.

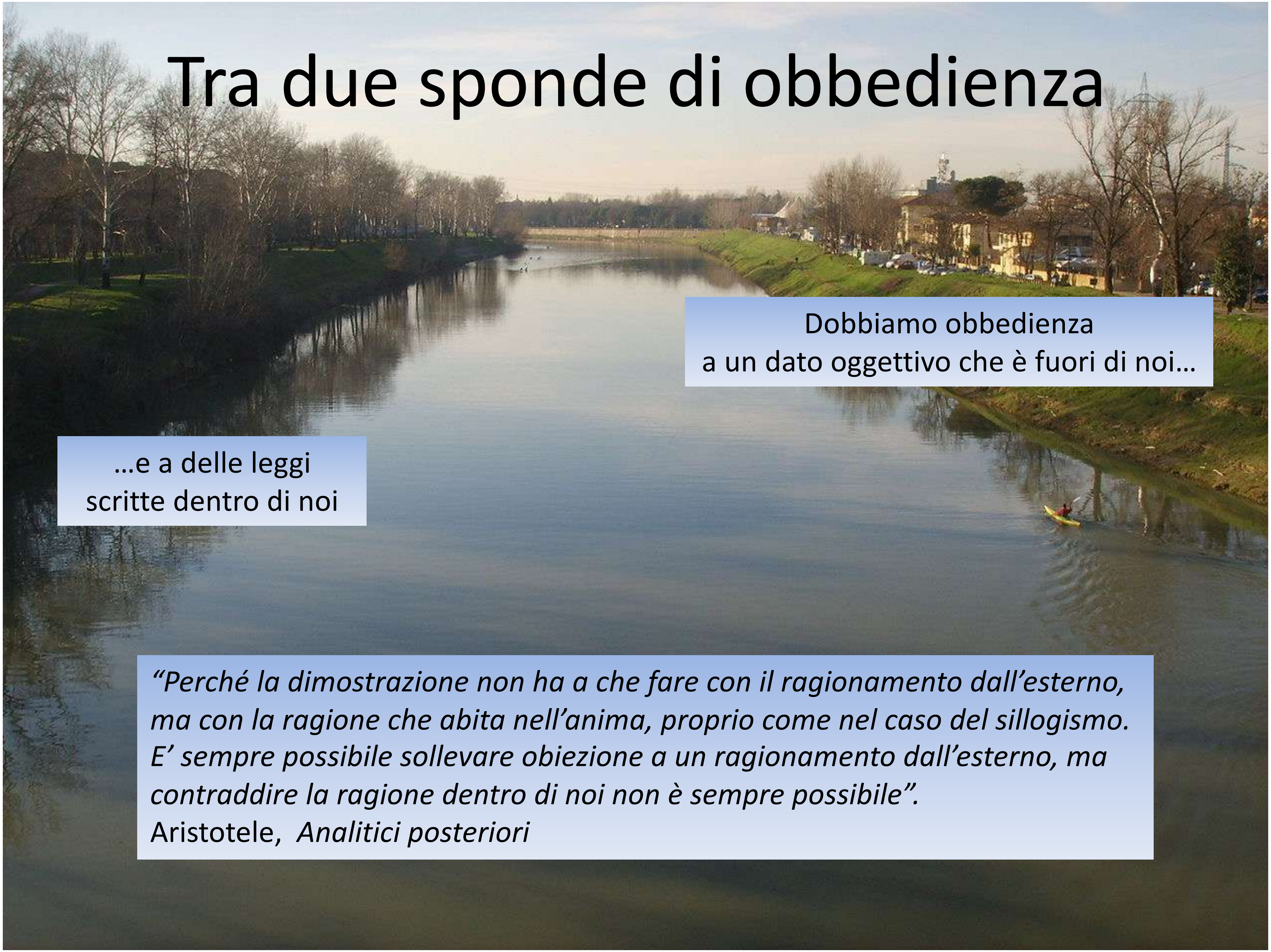
L’infinito per comprendere il finito
L’infinito ricondotto al finito

“L’onnipresenza dell’infinito in matematica è sorprendente, perché l’uomo è un essere finito, limitato, collocato su un pianeta limitato e finito. Eppure, questo essere finito esamina l’infinito e se ne serve, al punto che l’infinito risulta indispensabile per comprendere il finito stesso.”
(Jean Pierre Luminet, Marc Lachièze-Rey: Finito o infinito? Limiti ed enigmi dell’universo).

Ma è anche sorprendente il fatto che, dopo tutto, noi *riusciamo* a stabilire delle verità indubitabili anche riguardo all’infinito e ai procedimenti infiniti, e lo facciamo con un numero finito di parole e di passaggi logici.


“La bellezza della matematica è che con essa ci troviamo a quel punto di intersezione tra limitazione e libertà che è l’essenza stessa dell’uomo.” Hermann Weyl

Tra due sponde di obbedienza



Dobbiamo obbedienza
a un dato oggettivo che è fuori di noi…

…e a delle leggi
scritte dentro di noi

"Perché la dimostrazione non ha a che fare con il ragionamento dall'esterno, ma con la ragione che abita nell'anima, proprio come nel caso del sillogismo. E' sempre possibile sollevare obiezione a un ragionamento dall'esterno, ma contraddire la ragione dentro di noi non è sempre possibile".
Aristotele, *Analitici posteriori*

Grazie!

marco.bramanti@polimi.it

https://bramanti.faculty.polimi.it/