MATEMATICA E CAOS

Esercizi

Esercizi introduttivi

1. Determinare la successione x_n generata dal sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n} \qquad \text{con } x_0 = 1$$

2. Determinare la successione x_n generata dal sistema dinamico discreto ($x_n \geq 0$)

$$x_{n+1} = x_n + 2\sqrt{x_n} + 1 \qquad \text{con } x_0 = 0$$

3. Determinare una funzione $f(x)$ tale che il sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

generi, con $x_0 = 0$, la successione $0, 1, 8, 27, \ldots, n^3, \ldots$

Soluzioni

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

2. $0, 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$

3. $f(x) = x + 3x^{2/3} + 3x^{1/3} + 1$

4. (Interesse composto) Andrea apre un conto in banca, depositando E. 500. L'interesse offerto dalla banca è il 3% annuo. Gli vengono proposte due possibili opzioni:

1) l'interesse maturato viene accreditato e capitalizzato ogni mese

2) l'interesse maturato viene accreditato alla fine di ogni anno, ma in questo secondo caso la banca offre un "premio" di E. 1 ogni anno

Quale delle due offerte è più conveniente, supponendo di chiudere il conto dopo un anno?

Prima opzione: $x_{n+1} = x_n + \frac{r}{12} x_n$ ($r = 3/100$, n indica il mese)

$$x_n = \left(\frac{401}{400}\right)^n \cdot 500$$

$x_{12} = 515.21$

Seconda opzione: $y_{k+1} = y_k + r \cdot y_k + 1$ ($r = 3/100$, k indica l'anno)

$y_1 = 516$

Esercizi su punti fissi

1. Modificare l'algoritmo di Erone in modo da ottenere un sistema dinamico che calcola $\sqrt[3]{A}$

2. Modificare l'algoritmo per dividere un segmento in tre parti uguali, in modo da ottenere un algoritmo per dividere un segmento in sette parti uguali.

Soluzioni

1. $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x^2}\right)$

2. $f(x) = \frac{1}{6}(1 - x)$

Esercizi su punti periodici

1. Verificare che il sistema dinamico discreto

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

con $f(x) = 2(x-1)^2$ ammette due punti fissi e due punti periodici di periodo 2 nell'intervallo $[0, 2]$.

Soluzione

Punti fissi: $x = 1/2$, $x = 2$

Punti di periodo 2: $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$

Problema dei conigli modificato

Regola 2 modificata: all'inizio di ogni anno, ogni coppia che ha già raggiunto l'età della riproduzione almeno un anno prima, genera due (e solo due) coppie di conigli

◦ Scrivere il sistema dinamico che rappresenta questa legge evolutiva, e calcolare i primi numeri della successione x_n generata con le condizioni iniziali $x_0 = x_1 = 1$.
◦ Verificare che in astratto, scegliendo opportunamente le condizioni iniziali si possono avere soluzioni periodiche.
◦ Per $n \to \infty$, come si comporta il rapporto $\frac{x_{n+1}}{x_n}$?

anno 1	anno 2	anno 3	anno 4	anno 5
1	1	1	1	1
		2	2	2
			2	2
				6
1	1	3	5	11

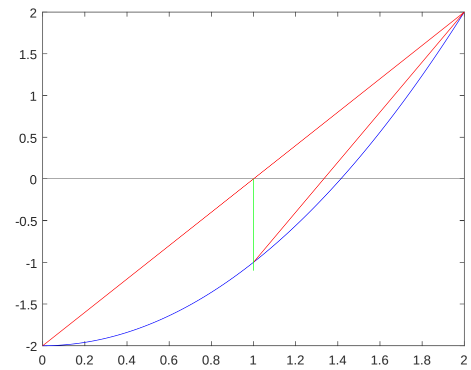
Risposte

$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, radici caratteristiche $2, -1$

Metodi numerici iterativi

Un altro modo di calcolare la radice di 2 (metodo delle corde)

Sia $g(x) = x^2 - 2$. L'unica soluzione positiva dell'equazione $g(x) = 0$ è $\sqrt{2}$.



Esercizio

(1) Dato un intervallo generico $[a, b]$, scrivere l'equazione della retta che passa per i punti di coordinate $(a, g(a))$, $(b, g(b))$

(2) Sotto le condizioni $g(a) < 0 < g(b)$, g crescente e convessa, calcolare il punto di intersezione della retta precedentemente determinata con l'asse x

(3) Iterando il procedimento (con $x_0 = a$), si genera una successione $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Determinare la funzione $f(x)$ in modo che il sistema dinamico

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

generi la successione $x_0, x_1, x_2, \ldots$

(4) Verificare che $\bar{x}$ è un punto fisso della funzione $f(x)$ se e solo se $g(\bar{x}) = 0$.

Risposte

(1) $y = g(b) + \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - b)$

(2) $x_1 = \dfrac{ag(b) - bg(a)}{g(b) - g(a)}$

(3) $x_{n+1} = \dfrac{x_n g(b) - bg(x_n)}{g(b) - g(x_n)}$