Laboratorio didattico di

Matematica
e
Musica

La Matematica nella Musica
La Musica nella Matematica

14 giugno 2016
Luisella Caire
DISMA

Programma

Parte Prima: alla scoperta della Matematica nella Musica

1 – Excursus storico-aritmetico – Musica da Pitagora ai giorni nostri

Introduzione storica: da Pitagora a Bach, attraverso numeri razionali e non

2 – Excursus geometrico - Le simmetrie in Musica

Rappresentare la Musica

Gruppi di trasformazioni, gruppi di simmetria.

Trasformazioni in musica

Bach e altri musicisti-geometri

Parte Seconda: la Musica che viene dalla Matematica

Excursus creativo: analisi di alcune teorie matematiche utilizzabili (tra l'altro) per comporre musica (Automi Cellulari, L-Sistemi, metodi IFS dei Sistemi di Funzioni Iterate, Frattali)

Teorie matematiche nate per modellare i sistemi biologici: la matematica osserva la natura, cerca di spiegare e riprodurre ciò che fa e ne prende a prestito i metodi.

Si vogliono utilizzare questi metodi per capire come si può produrre la musica.

Seconda parte: excursus creativo

La Musica che viene dalla Matematica

1 - Automi cellulari: teoria matematica nata per modellare i sistemi biologici (studio dei principi logici che presiedono alla capacità di autoriproduzione), le cui applicazioni consentono (anche) la creazione di musica.

Quale nuova musica?

Questo è un esempio della nuova musica che vi vorrei fare ascoltare

http://comp.uark.edu/~dmillen/StarChantDemo.mp3

Brano prodotto con *CAM* di Dale Millen

Quale nuova matematica?

'Tre secoli fa la scienza fu trasformata dalla nuova drammatica idea che per descrivere il mondo naturale si potessero usare regole fondate su equazioni matematiche.
Il mio proposito è di iniziare un'altra analoga trasformazione, e di introdurrre un nuovo tipo di scienza che possa essere implementata in semplici programmi'

Stephen Wolfram, prefazione al suo libro *A New Kind of Science* (2002)

Questo proposito di Wolfram nasce dalla necessità di riuscire a descrivere i *sistemi complessi*, per cui non era sufficiente la matematica utilizzata fino al secolo scorso per studiare i fenomeni naturali.

SISTEMI COMPLESSI

SISTEMI DINAMICI COMPOSTI DA UN ALTO NUMERO DI PARTI CAPACI DI

Auto-organizzazione

Interazione

ORIGINANO COMPORTAMENTI GLOBALI NON SPIEGABILI DA SEMPLICI LEGGI RISOLUBILI CON EQUAZIONI MATEMATICHE

ESEMPI

Sistema immunitario
Cervello
Turbolenze in un fluido
Interazioni tra persone di una comunità
Flusso di veicoli nella rete autostradale
Variazioni del mercato finanziario

Automi cellulari

La teoria degli automi cellulari (AC) rappresenta un'importante evoluzione dell'intero mondo scientifico, o meglio, del modo di pensare della scienza.
Secondo Wolfram, gli AC producono modelli rivoluzionari e possibili strategie di soluzione di problemi per un ampio spettro di discipline, scientifiche, umanistiche e anche artistiche.

Gli AC mostrano il fenomeno dell'emergenza della complessità da un insieme di regole semplici.
Il classico gioco di *Life* è uno degli esempi principali.

AUTOMI CELLULARI

https://www.youtube.com/watch?v=LeBazK1iWys 2′53

Tutto nasce dal basso......e poi va su

Modo di procedere: Bottom-up

Non cerca un centro direzionale

Visione locale

Cerca le regole di interazione tra le unità locali e ricava le caratteristiche globali dalle conoscenze locali

Le sue applicazioni consentono di modellare fenomeni complessi quali:

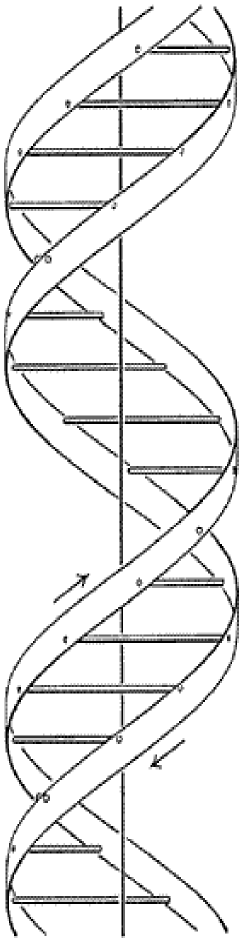
Interazioni tra individui di una comunità (Volo degli uccelli, fenomeni di addensamento urbano, infezioni batteriche, infezione da HIV)

Modello dei mezzi eccitabili (risposta muscolare, incendi nelle foreste)

Simulazione di eventi naturali (frane, colate vulcaniche…)

Creazione di musica

Genesi



Alla base della teoria matematica degli AC c’è lo studio dei principi logici che presiedono alla capacità di autoriproduzione 1940: **John von Neumann** si chiedeva:

‘*Quale tipo di organizzazione logica è sufficiente ad un automa per riprodurre se stesso?’*
Von Neuman aveva in mente il fenomeno naturale dell'autoriproduzione quando la pose, ma non tentò di simulare l'autoriproduzione di un sistema naturale a livello genetico e biochimico. ‘*Egli voleva astrarre dal problema naturale dell'autoriproduzione la sua forma logica.’(*Burks1970)

Studia modelli ove l’informazione per l’autoreplicazione è presente in due forme: passiva (dati copiati per essere da modello al duplicato) e attiva (azioni da compiere per costruire le copie)

Anticipa il **MODELLO A DOPPIA ELICA**

Watson e Crick (1953): Modello di funzionamento del DNA

John von Neumann 1903 – 1957

Matematico ungaro-americano che diede importanti contributi in matematica, logica, fisica quantistica, economia, meteorologia, informatica, e teoria dei giochi.
Era noto fin da giovane per la memoria fenomenale e per la velocità con cui assorbiva idee e risolveva problemi.

Nel 1925 conseguì la laurea in ingegneria chimica a Zurigo e nel 1926 il dottorato in matematica all'Università di Budapest. La sua tesi di dottorato sulla teoria degli insiemi fu un contributo importante in materia. Il suo "Fondamenti matematici della meccanica quantistica" (1932) fornì una solida struttura alla nuova disciplina scientifica. Il suo studio nella teoria dei giochi, "Teoria dei giochi ed economia" (1944) fu di fondamentale importanza in economia. Nel 1930, si trasferì negli Stati Uniti, all'Università di Princeton dove divenne professore nel 1931. Negli anni '40 e '50, von Neumann fu uno dei pionieri dell'informatica. Diede importanti contributi allo sviluppo del disegno dei circuiti, contribuì alla teoria degli Automi cellulari, sostenne l'adozione del bit come misura della memoria dei computer. Inoltre, il suo impegno attrasse l'interesse degli altri matematici e accelerò lo sviluppo dell'informatica. Durante e dopo la II guerra mondiale lavorò come consulente delle forze armate, a Los Alamos: diede importanti contributi al metodo di implosione per ottenere un'esplosione nucleare e alla dimostrazione della possibilità della bomba a idrogeno. Nel 1956 ricevette il premio Enrico Fermi.
Fu uno degli ultimi tra gli scienziati contemporanei davvero interdisciplinari.

Evoluzione

Stanislav Ulam 1941, Burks 1953, Codd, 1968 elaborarono modelli discreti, con diverse cellule di intorno e diversi numeri di stati possibili

Stanislav Ulam, nato in Polonia nel 1909, fu uno degli esponenti di maggior rilievo della scuola matematica polacca. Negli anni Trenta emigrò negli Stati Uniti, dove visse e lavorò fino alla morte, nel 1984. Durante la seconda guerra mondiale prese parte al progetto costruzione della bomba atomica nei laboratori di Los Alamos (con von Neumann, di cui era allievo). I suoi contributi spaziano dalla matematica pura alla fisica nucleare, e hanno esercitato una profonda influenza sullo sviluppo della matematica e sui suoi rapporti con la scienza e la tecnologia.

Il badge che Ulam usava per accedere ai Laboratori di Los Alamos, dove lavorava con von Neumann al *'progetto Manhattan'* per la costruzione della bomba H

Automa Cellulare

Automa= macchina in grado di agire in modo autonomo in un dato contesto

Automa cellulare= rete infinita di cellule identiche

Notazioni: C=cellula

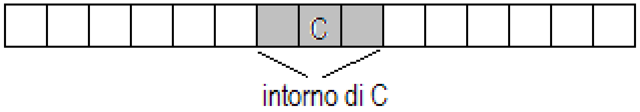
{C}=intorno di C

L'automa cellulare è:

- finito (l'insieme degli stati che ogni cella può assumere è finito)
- discreto (nello spazio e nel tempo)
- locale (lo stato di C dipende solo dallo stato di {C}, e non ci sono input esterni)
- parallelo (le cellule sono aggiornate simultaneamente)

Automa cellulare lineare

1-dimensionale



Ideato da Wolfram (1980)

E’ una stringa infinita di celle che possono assumere solo i due stati {0,1}

L’intorno {C} di C è costituito da tre celle (compresa C stessa)

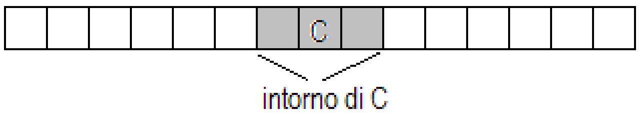
Lineare: lo stato al tempo t+1 è una c.l. degli stati delle cellule dell’intorno al tempo t

Automa cellulare lineare

1-dimensionale

Stephen Wolfram è nato in Inghilterra nel 1959. Ha studiato a Eton e Oxford, e ha preso il PhD in fisica teoretica a Caltech a 20 anni. I suoi primi lavori sono stati sulla fisica delle particelle, cosmologia e scienza dell'informazione.
Wolfram ha cominciato i suoi lavori sulla complessità nel 1981. Nell' '86 ha fondato la Wolfram Research Inch. e ha iniziato lo sviluppo del famoso programma Mathematica.
Dall' '88 Mathematica è diventato uno standard nel software computazionale.
Dal 1992 al 2002 Wolfram ha lavorato al suo controverso libro *A new kind of science,* che mostra uno studio empirico di sistemi computazionali molto semplici. Inoltre esso spiega che per capire la complessità della natura e definirne dei modelli, questo tipo di sistemi risulta estremamente efficace, piuttosto che la matematica tradizionale.

Regole dell'automa



Sono possibili per ogni cella solo i due stati {0,1}.

Ci sono dunque 8 possibili configurazioni degli intorni di C

111 110 101 100 011 010 001 000

Per ogni possibile configurazione di {C}, si può scegliere come successivo stato per C solo 0 o 1.

E dunque ci sono **2^8=256 possibili regole**

Regola 90

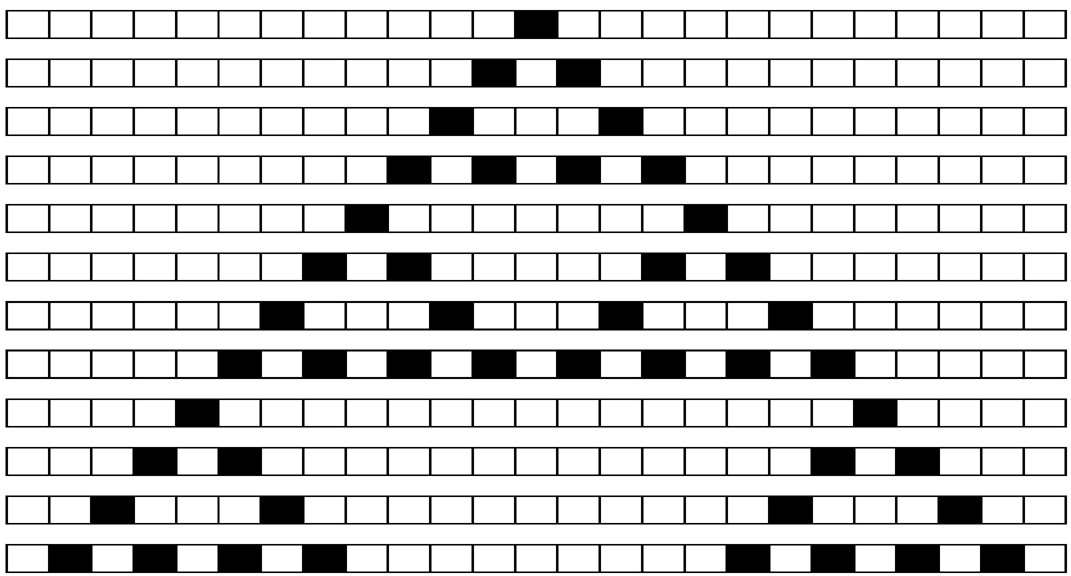
con una sola cellula iniziale, in 12 passi

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	0	1	1	0	1	0

La regola assegna 1 alla cella centrale se e solo se nel suo intorno (forato) c'è uno e un solo 1 (fa lo Xor dei bit delle due cellule adiacenti):

REGOLA 90 = 01011010

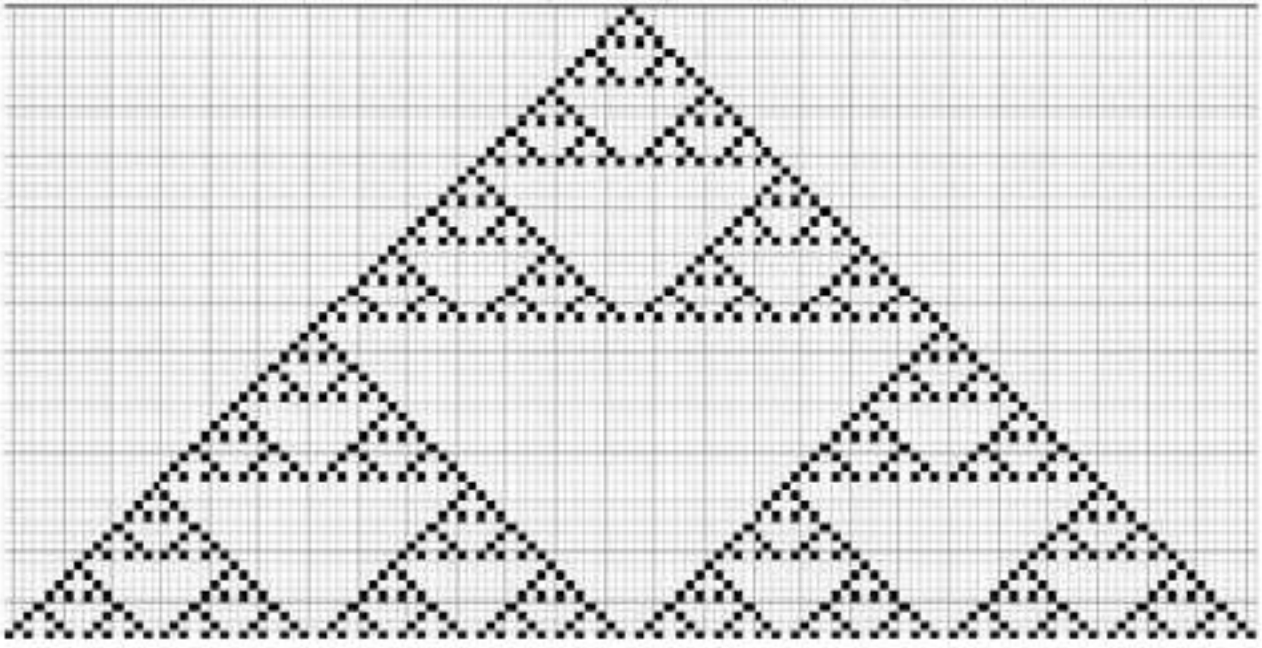
Passo 1
Passo 2
Passo 3
Passo 4
Passo 5



La regola 90

con una sola cellula iniziale in 63 passi

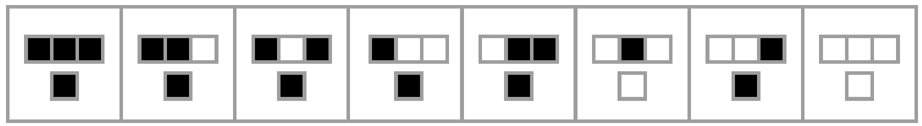
neighborhood	111	110	101	100	011	010	001	000
resulting states	0	1	0	1	1	0	1	0

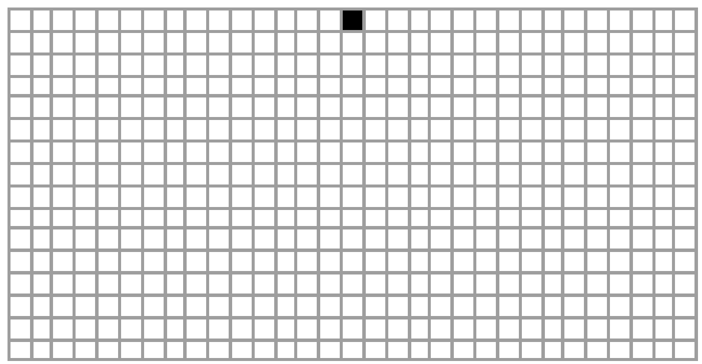


E' il **triangolo di Sierpinski**, un ben noto **FRATTALE**

Regola 250

con una sola cellula iniziale

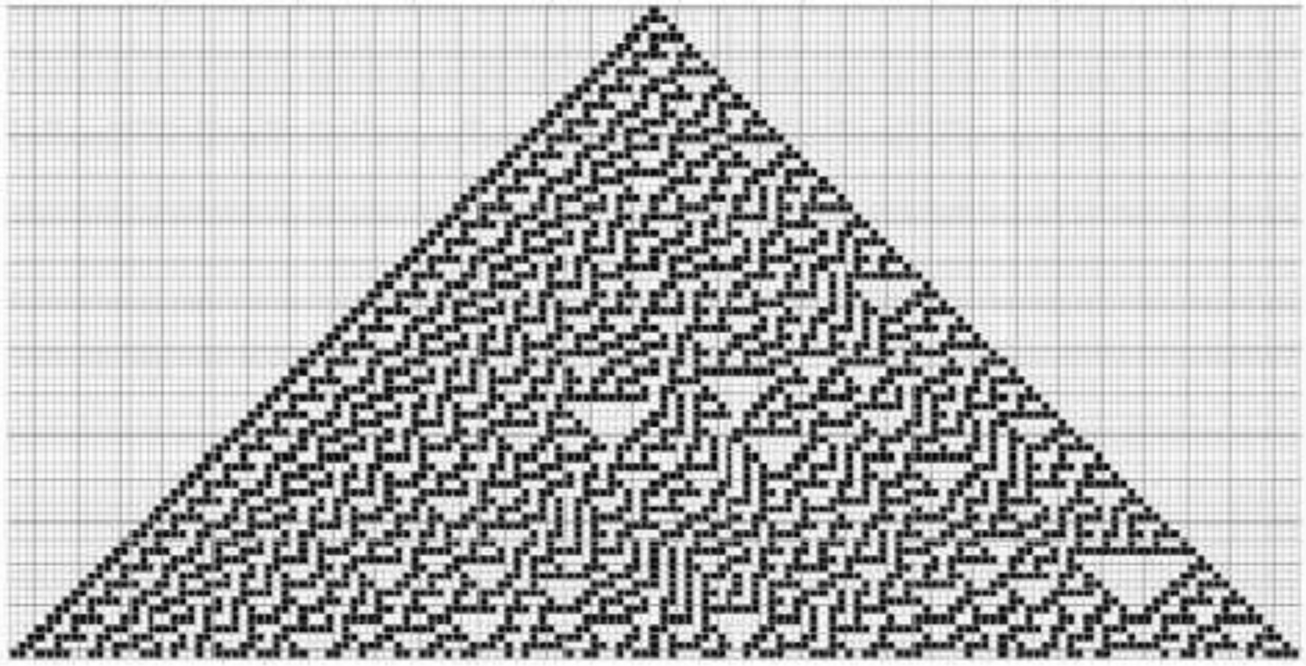




http://tones.wolfram.com/about/how.html

La regola 30 con una sola cellula iniziale dopo 75 passi

neighborhood	111	110	101	100	011	010	001	000
resulting states	0	0	0	1	1	1	1	0

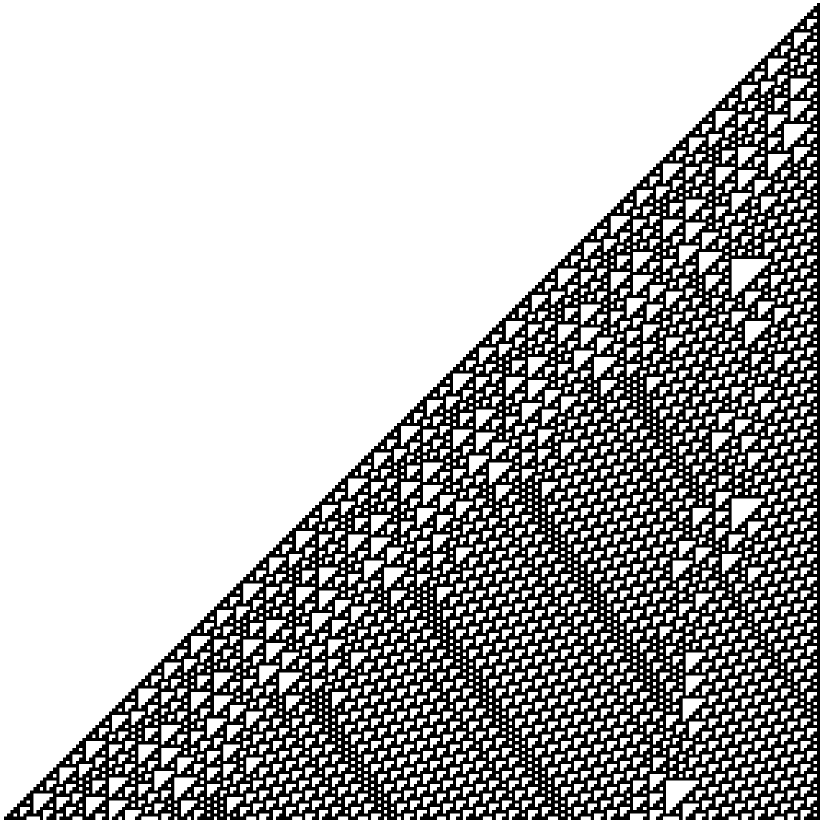


Guardando attentamente la figura, si notano alcune regolarità.
Ma nell’insieme sembra molto complessa e a tratti casuale.

La regola 110

con una sola cellula iniziale

neighborhood	111	110	101	100	011	010	001	000
resulting states	0	1	1	0	1	1	1	0



Classe 4

Pagina interattiva

Potete sperimentare tutte le leggi di Wolfram con 3 celle di intorno

http://mokslasplius.lt/rizikos-fizika/en/wolframs-elementary-automatons

Classi degli AC lineari

Wolfram esaminò sistematicamente tutte le 256 regole, alla ricerca di somiglianze, regolarità, etc. Alcune fanno semplici pattern, abbastanza regolari, la prima che si gli si presentò 'imprevedibile' fu la regola 30.
Ebbe l'idea di classificarle in 4 classi.

Classe 1: qualunque sia la configurazione iniziale dopo un numero finito di passi
→ stato stabile (esempio: Regola numero 4).

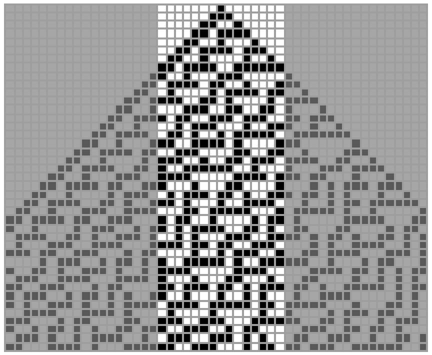
Classe 2: lo stato di una cellula è determinato dai valori iniziali di poche cellule adiacenti → strutture isolate stabili o di breve periodo (esempio: Regola 54).

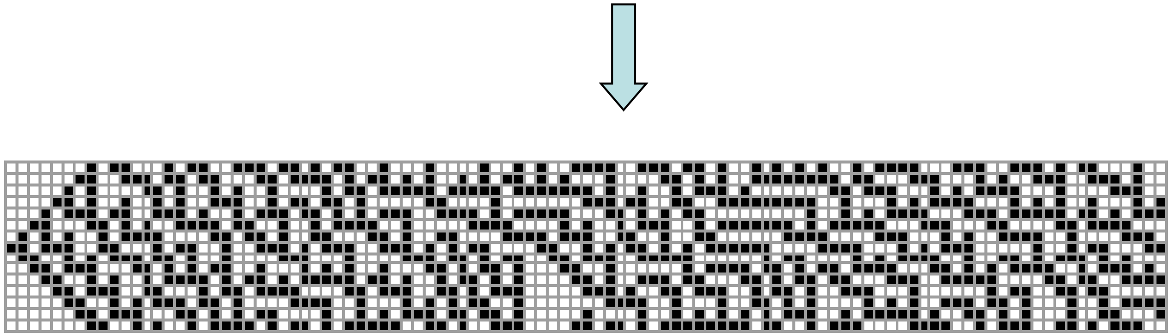
Classe 3: lo stato di una cellula è determinato dai valori iniziali di quasi tutte le cellule adiacenti → strutture caotiche aperiodiche, autosimilari (FRATTALI) (esempio: Regola 90).

Classe 4: dipende completamente dallo stato iniziale, impredicibile → morte oppure complessità (LIFE) (esempio: Regola 110).

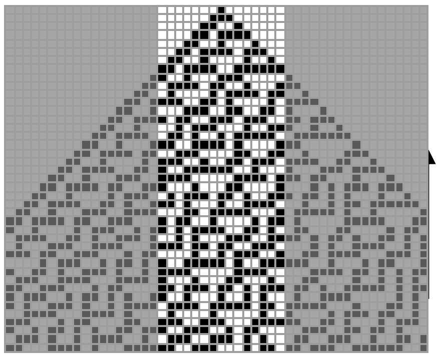
Musica degli AC
Wolfram Tones

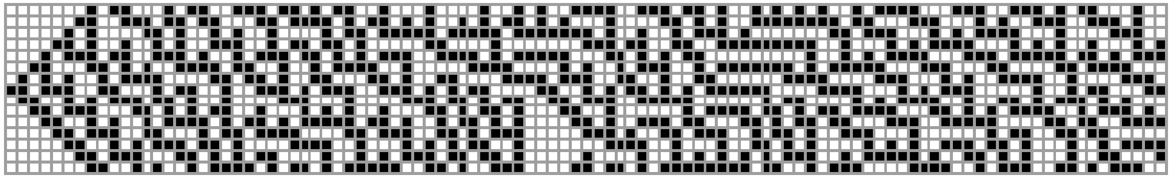
La semplicissima idea chiave di *WolframTones* per ‘rendere musicale’ un pattern generato da un AC 1-D è di prendere una striscia verticale del modello adagiarla orizzontalmente, e poi interpretare lo ‘spartito’ ottenuto:





Wolfram*Tones* con la regola 30





Esempio: la regola 30 con inizio da una singola cella nera, nella tonalità di Do maggiore.

L’asse orizzontale misura il tempo, l’ordinata di ogni quadretto è collegata alla frequenza della nota corrispondente. La funzione specifica tra ordinata e nota corrispondente è determinata dalla tonalità della scala che si usa, e da alcuni algoritmi di *Mathematica*. Il più semplice è prendere ogni blocco di celle nere contigue alla stessa altezza, e associargli una singola nota suonata da un solo strumento, interpretando il numero delle celle contigue come durata nel tempo.

Questo software può anche associare diversi strumenti, giocando sui colori, ad esempio. In queste pagine esplicativa di Wolfram ascoltiamo come suona: http://tones.wolfram.com/about/how.html

WolframTones con altri intorni

Alcune di queste regole generano pattern musicali molto semplici, inadeguati per produrre musica di un qualche interesse. Tuttavia lo scopo di *WolframTones* è, dato un certo ‘stile musicale’, cercare le possibili regole che producano musica complessa e adatta a quello stile. Sembra impossibile trovare musica in questo modo. Eppure, come anche succede in natura, i comportamenti complessi sono davvero abbastanza comuni nell’universo computazionale, e a volte si arriva a trovarli semplicemente cercandoli…
Non si può aspettare di sapere in anticipo dove si troverà un particolare tipo di complessità. Però si può esplorare, e *WolframTones* mostra ciò che si può ottenere.

http://tones.wolfram.com/generate/

CAM - Cellular Automata Music

http://www.dm.unito.it/~cerruti/Az1/wuc5_1.html

Se si opera con AC con intorni di 5 elementi e sempre i soli due stati (0,1), ci possono essere 2^5=32 possibili intorni e dunque 2^{32}≈4 miliardi di possibili regole.

Nel 1990, Dale Millen sviluppò *Cellular Automata Music* servendosi di un AC 1-dimensionale con 2 possibili stati per cella e intorni di 5 celle Considerò stringhe costituite da 10 elementi, chiuse circolarmente.

Regola di produzione (esempio): vengono trasformati musicalmente solo i risultati delle celle 1,5,9

Regola di nascita: se una cellula ha uno degli intorni 2, 6, 7, 11, 12, 15, 16, 17, 21, 22, 26, 27, 30 (in binario) si attiva. Esempio:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gen0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
Gen1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
Gen2	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0

Questo è l'articolo di Dale Millen: http://comp.uark.edu/~dmillen/cam.html

Ecco come risultano le successive 40 generazioni delle celle (1,5,9), a partire dalla stringa iniziale 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0:

si leggano I numeri a terne. (0,12,8) (8,12,2) (18,13,20) che traducono in decimale lo stato binario dell'intorno (5 celle) di (1,5,9) ad ogni generazione successiva

GEN. 0 l'intorno di 1 è 00000=0, l'intorno di 5 è 01100=12, l'intorno di 9 è 01000=8

GEN. 1 l'intorno di 1 è 01000=8, l'intorno di 5 è 01100=12, l'intorno di 9 è 00010=2

GEN. 2 l'intorno di 1 è 10010=18, l'intorno di 5 è 01101=13, l'intorno di 9 è 10100=20

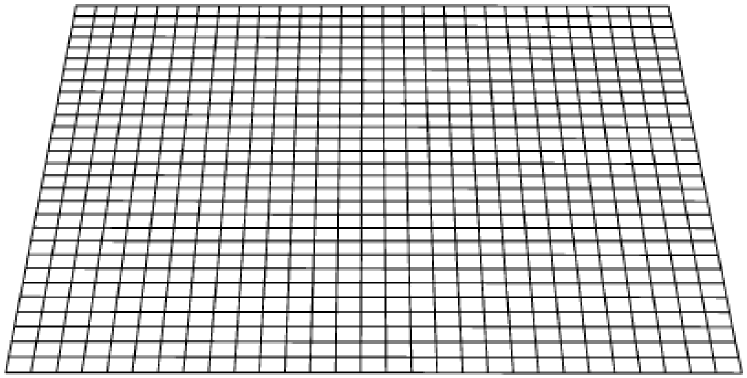
0	12	8	8	12	2	18	13	20														
1	27	16	17	23	20	6	8	9	5	19	17	24	3	22	26	2	14	4	13	17	24	10
6	27	16	6	23	20	5	8	9	26	19	17	20	3	22	0	2	14	8	13	17	19	10
6	2	16	6	12	20	5	29	9	26	2	17	20	12	22	0	13	14	8	11	17	19	20
6	2	9	6	12	1	5	29	17	26	2	6	20	12	5	0	13	24	8	11	26	19	20
4	2	9	24	12	1	27	29	17	23	2	6	8	12	5	19	13	24	3	11	26	2	20
4	13	9	24	10																		
					1	27	16	17	23	20	6	8	9	5	19	17	24	3	22	26	2	14

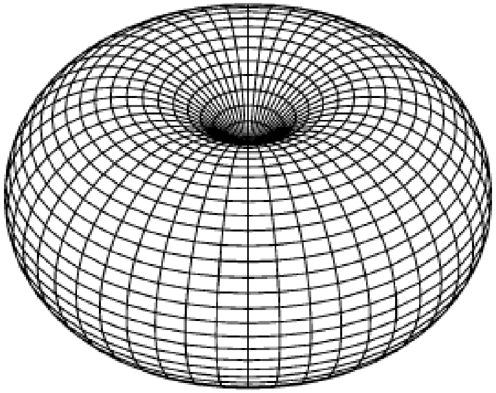
La trasformazione musicale dell'AC avviene aggiungendo 60 ai numeri sopra e assegnando a ognuno una **nota** MIDI (tra 60 e 90, cioè tra DO3 e SOL5-);
il **timbro** risulta dall'assegnare un particolare canale MIDI a ogni colonna; il **tempo** risulta dalla densità dell'intorno (numero degli 1).
Per variare e evitare ripetizioni, si modifica in modo random la selezione delle colonne (e anche il numero) attivate musicalmente; questo è un esempio di musica:

http://comp.uark.edu/~dmillen/StarChantDemo.mp3

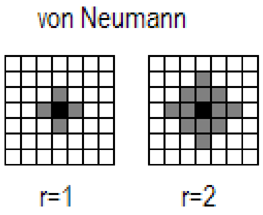
AC 2-dimensionali

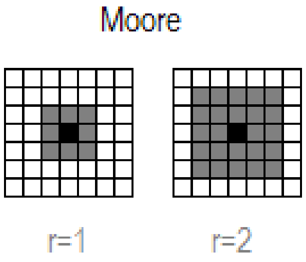
Celle in una griglia bidimensionale infinita (rappresentabile su un toro) che si evolvono nel tempo





Intorno di von Neumann





Intorno di Moore

LIFE (Conway, 1970)

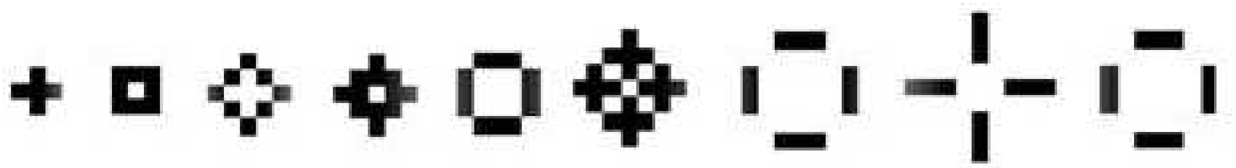
Intorno di Moore a 9 celle, due soli stati {0,1}

regola di nascita: se C=0 e in {C} ci sono esattamente tre 1 → C=1

regola di sopravvivenza: se C=1 e in {C} ci sono due o tre 1 → C=1

regola di morte: se C=1 e in {C} non ci sono due o tre 1 → C=0

Esempio; partendo da una croce:



….. continua a oscillare, a 'lampeggiare' (è un *blinker*)

Proviamo!

http://math.mercyhurst.edu/~lwilliams/Applets/GameOfLife.html

Personaggi di Life

Blocco

Blinker

Semaforo

Aliante (glider)

Divoratore (eater)

Cannone di alianti (glider gun)

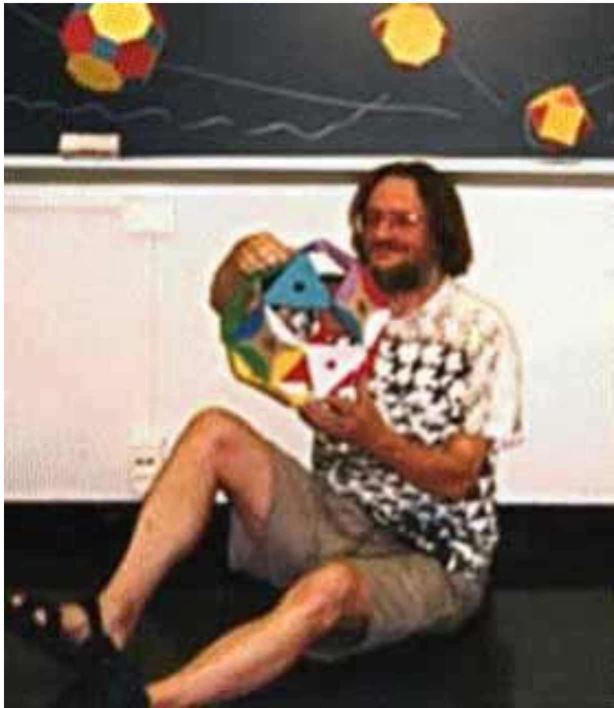
Max

Ne vediamo alcuni qui:

https://it.wikipedia.org/wiki/Gioco_della_vita

John Conway

John Horton Conway è uno dei più noti matematici contemporanei.
Nato a Liverpool nel 1937, è uno dei più geniali e anticonformisti matematici della Princeton University, dove si è trasferito nel 1986 da Cambridge per occupare la cattedra di Matematica intitolata a von Neumann.
Egli è stato ed è attivo in molti campi che spaziano dalla teoria dei codici correttori d'errore alla teoria dei gruppi e a quella dei giochi.
Al grande pubblico è noto per alcuni suoi lavori divulgativi (bellissimo il libro scritto con Guy) e per essere lo scopritore del meraviglioso mondo di Life.



Modello dei mezzi eccitabili

(Greenberg, Hastings)

- Eccitazione dei muscoli
- Incendi nelle foreste

S={0,1,2}   0=riposo, 1=eccitazione, 2=recupero

intorni di von Neumann o Moore, r=1 o r=2

funzione di transizione:

- 0 --> 0 se u=0 qualunque sia u in {C}
- 0 --> 1 se esiste u=1 in {C}
- 1 --> 2 qualunque sia u in {C}\C
- 2 --> 0 qualunque sia u in {C}\C

http://demonstrations.wolfram.com/GreenbergHastingsModel/

Volo degli uccelli

Reynolds (1986)

I valori iniziali sono casuali (posizione, velocità -uguale per tutti)

Gli intorni sono tridimensionali

La funzione di transizione (regole di comportamento individuale) tiene conto di:

- Separazione (distanza minima tra individui per evitare collisioni)
- Allineamento (convergenza verso il "punto leader medio" degli intorni)
- Principio di coesione (distanza tra individui dell'intorno limitata)

Spiegazione di 'Boyds':

http://www.red3d.com/cwr/boids/

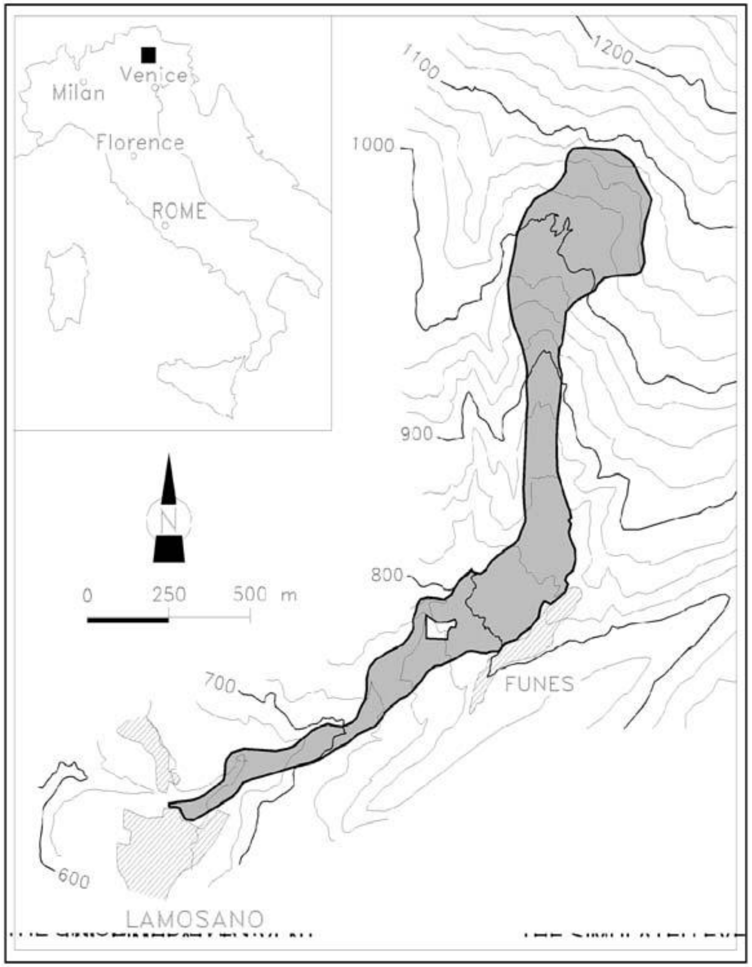
Il gruppo si autoregola!   Esempio di un volo di Boyds:

http://www.siggraph.org/education/materials/HyperGraph/animation/art_life/video/3cr.mov

Simulazione di evento franoso

15680 celle, 6000 iterazioni
Accordo sostanziale con la
Effettiva frana avvenuta nel
1984 sul monte Ontake (Giappone)

e a Tessina (Italia 1992)



Colata lavica sull’ Etna

1300000 celle (1 cella = 10x10 mq)
- celle terreno
- celle cratere
- celle lava

6000 iterazioni
Simulazione del 1986 simile alla effettiva colata del 1992 (Zafferana)

Infezione da HIV

I Fase : Infezione Primaria (2-6 settimane)

- aumento esponenziale della popolazione virale
- declino del sistema immunitario

II Fase : Periodo di latenza (2-10 anni)

– piccole quantità di virus HIV con alto tasso di mutazione
– riduzione dei linfociti T nel sangue periferico

III Fase : Sviluppo dell’AIDS

– concentrazione dei linfociti T inferiore al 30%
– depressione totale del sistema immunitario

Simulazione di risposta all'infezione da HIV

Modello cooperativo in condizioni di disomogeneità spaziale
(le cellule infette sono situate in organi periferici)

Celle = Linfociti T (bersaglio dell'HIV) (circa 1000)

Intorno di Moore a 9 celle

$S=\{B, A_1, A_2, E\}$

– B = cellula sana

- A_1 = cellula infetta che diffonde l'infezione

- A_2 = cellula infetta che ha sviluppato una risposta immunitaria

- E = cellula eliminata dalla risposta immunitaria

Funzione di transizione

– Aggionamento delle cellule B, A_1, A_2

– Ricambio delle cellule E

Musica da Life

Sono stati fatti molti tentativi di creare musica a partire da Life.
In genere le musiche prodotte, anche se molto diverse, manifestano una certa ripetitività, ma creano comunque un’atmosfera….
Ad esempio:

http://www.youtube.com/watch?v=rWq4AppMm8A

Una evoluzione diversa si è avuta quando si è pensato di usare diversi tipi di automi cellulari per creare musica.

DCS

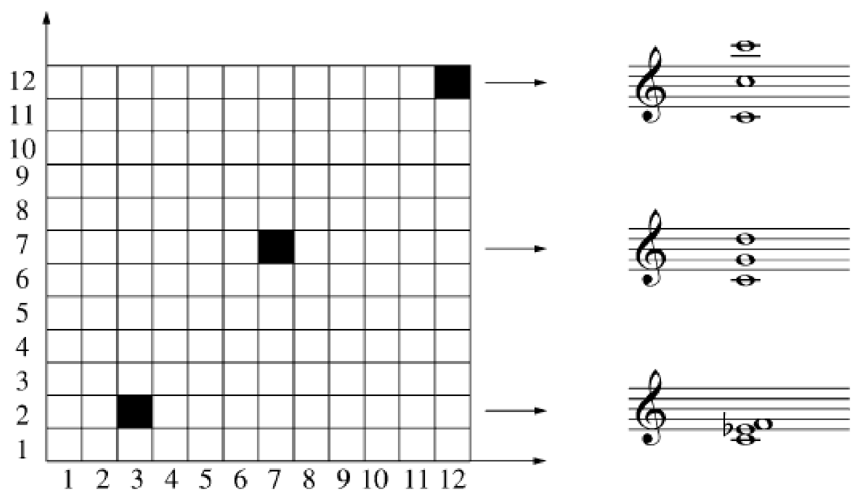
Demon Cyclic Space è un AC creato da David Griffeath della Wisconsin University, che genera mondi di incredibile complessità.
Si inizializza con una distribuzione casuale di celle colorate, finisce sempre con una struttura stabile, spiralica, che ricorda la crescita dei cristalli.

http://www.permadi.com/java/cautom/index.html

Ogni cella ha n stati (numerati da 0 a n-1, associati ciascuno a un colore). Una cella di stato *k* che ha un vicino di stato *k+1* passa allo stato *k+1* (mod n) (e dunque una cella di stato *n-1* può diventare solo di stato *0).* Questo automa è ciclico, e si comporta come se fosse su una superficie toroidale. E’ un ‘demone’ di lavoro, perché genera in continuità pattern complessi che si allargano su questa rete toroidale.

CAMUS

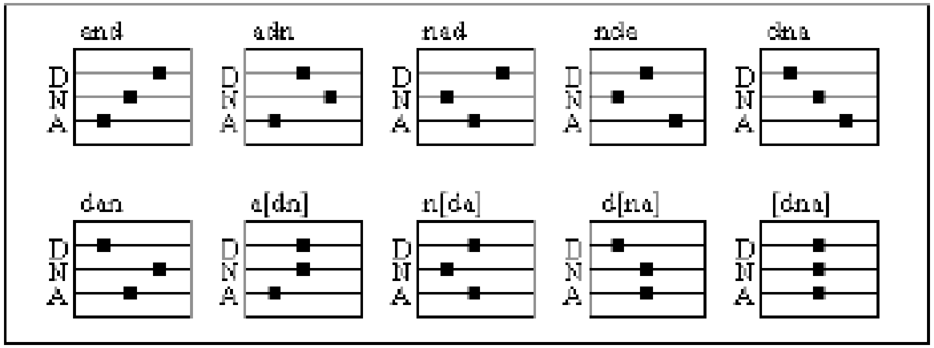
Cellular Automata Music, creato da Eduardo Reck Miranda, usa **Life** per generare le note e la loro durata, E usa **DCS** per la **strumentazione** dei pezzi.
Ogni cella dell’AC di Life ha due coordinate C(x,y) che forniscono un accordo: x è il numero di semitoni che distanzia la 2 dell’accordo dalla nota di base scelta, mentre y è la distanza (in semitoni) tra la 2 e la 3 nota



Esempio: scelta la nota fondamentale C4, la cella (3,2) dà la triade (C,Eb,F)

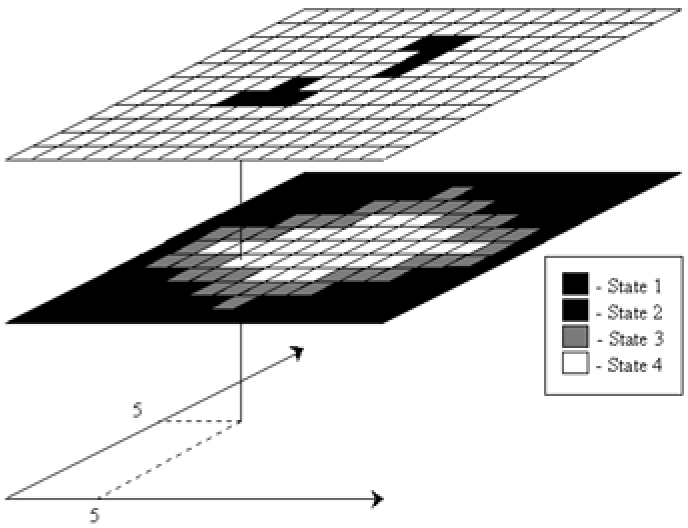
CAMUS= LIFE+DCS

Ad ogni generazione di Life, le cellule attive sono analizzate e mappate nelle corrispondenti triadi.
Per determinare la durata di ogni triade, il programma esamina ogni intorno {C}, assegnandogli una stringa di 8 caratteri binari (lo stato delle cellule di {C}).: ogni stringa-intorno viene spezzata in 4 e poi maneggiata con un algoritmo di combinazione lineare, che usa questi accordi fissi come moltiplicatori



DCS stabilisce la strumentazione, in quanto assegna diversi canali MIDI ai diversi stati dei DCS

CAMUS 2D e 3D



In **CAMUS 3D** si usa la terza coordinata z per creare accordi di 4 note.
Per determinare la durata temporale usa una catena di Markov del 1 ordine

Miranda ha composto molti pezzi musicali con CAMUS, come *Entre o Absurdo e o Misterio* (2001), per orchestra da camera, il quartetto d'archi *Batucada Scotica*, e recentemente *Grain Streams*, per piano e registrazioni elettroacustiche ed effetti live. Qui trovate l'articolo di Miranda, molto chiaro e interessante:
Cellular Automata Music: From Sound Synthesis to Musical Forms

http://www.academia.edu/2534006/

Brano musicale composto con CAMUS

Come si presenta