

Laboratorio didattico di

Matematica

e

Musica

La Matematica nella Musica

La Musica nella Matematica

14 giugno 2016

Luisella Caire

DISMA

Programma

Parte Prima: alla scoperta della Matematica nella Musica

1 – **Excursus storico-aritmetico** – Musica da Pitagora ai giorni nostri

Introduzione storica: da Pitagora a Bach, attraverso numeri razionali e non

2 – **Excursus geometrico** - Le simmetrie in Musica

Rappresentare la Musica

Gruppi di trasformazioni, gruppi di simmetria.

Trasformazioni in musica

Bach e altri musicisti-geometri

Parte Seconda: la Musica che viene dalla Matematica

Excursus creativo: analisi di alcune teorie matematiche utilizzabili (tra l'altro) per comporre musica (Automi Cellulari, L-Sistemi, metodi IFS dei Sistemi di Funzioni Iterate, Frattali)

Teorie matematiche nate per modellare i sistemi biologici: la matematica osserva la natura, cerca di spiegare e riprodurre ciò che fa e ne prende a prestito i metodi. Si vogliono utilizzare questi metodi per capire come si può produrre la musica.

Prima Parte - 2

Excursus geometrico: rappresentare la Musica

- Annotare la musica e visualizzare le melodie (come grafici di funzioni).
- Gruppi di trasformazioni, gruppi di simmetria.
- Trasformazioni in musica
- Bach e altri musicisti-geometri

Come rappresentare la musica – I Greci

La **semiografia musicale** è quella parte della teoria musicale che si occupa dei segni e dei simboli per trascrivere la musica. Gli antichi greci usavano una notazione musicale in cui indicavano i suoni della scala diatonica (di sette note) con le prime lettere dell'alfabeto (fenicio per gli strumenti e greco per la voce), il cui orientamento spaziale ne modificava l'altezza di un semitono o di quarti di tono; utilizzavano inoltre alcuni segni per le pause, legature, etc, per interpretare ritmicamente il dettato musicale. Questi segni erano scritti sopra la linea del testo. Ci sono giunti pochi frammenti musicali (una quarantina), quasi tutti papiri, qualche iscrizione, l'epitaffio di Sicilo, gli inni di Mesomedes (II secolo d.C.)



Epitaffio di Sicilo

<https://www.youtube.com/watch?v=ThwqvrTg4MQ>



Coro dell' *Ifigenia in Aulide*
(frammento di papiro del III sec. A.C.)

C Z̄ Z̄̇ KIZ̄ Ī K̄ I Z̄ ĪK̄ O C̄ ŌΦ̄
 Ὅ σον ζῆς, φαί νου, μη δέν ὄλ ως σύ λυ ποῦ·
 C K Z Ī K̄ ĪK̄ C̄ ŌΦ̄ C K O Ī Z̄ ĪK̄ C̄ C̄ Ē X̄ Ī
 πρὸς ὄλ ἰ γον ἔ σι τὸ ζῆν, τὸ τέ λος ὁ χρόνος ἄπαι τέ

Inno di Mesomedes

Ζ, Μ Ρ Σ
 αὐ τὸν δερκί α πῶ δν
 ζ, ζ μ ζ, ζ μ ζ, ζ μ ζ
 πο τὸ μὲν δέ σέ θην πνρ ἀμμορὸς
 C Φ C, Ρ, Μ, Μ Ρ Ρ C
 σοι μὲν χορὸς εὔδω δ' ἄστρων
 ζ, ζ μ ζ, ζ μ ζ, ζ μ ζ
 ἀνε τὸν μελὸς αἰεν αἰεί δων
 C Ρ Μ, Μ, Μ, C Ρ Μ Μ Μ Μ
 γλαυ καὶ δέ πᾶροι θε σε λα μ α·
 λυ ζ μ μ μ μ φ C Ρ Μ Ρ C
 λέ κων ὑπο σφύρα σι μὸς μων
 μ υ ζ ι ζ μ ι φ C Ρ Μ Ρ C
 πολυοί μὸν ἀ κοσ μὸν ἐλί στων·

Notazione musicale nel Medioevo

Sant'Isidoro di Siviglia (560-636) dice che la musica non può essere scritta: *'Se i suoni non sono appresi a memoria dall'uomo, scompaiono, perché non si possono scrivere'*

Nel Medioevo, data la crescente difficoltà nel memorizzare melodie sempre più lunghe ed articolate, nacque l'esigenza di *'notare'* sopra il testo da cantare alcuni segni, i **neumi** del canto gregoriano, (neuma=respiro), formula melodica che descrive una intera sillaba, costituita da una o più note=quadretti sovrapposti che aiutavano i cantori a ricordare la direzione (ascendente o discendente) della melodia.

Si iniziò con una linea tirata a secco e poi disegnata. Poi le linee divennero due, distinte dalle lettere C (DO) e F (FA), colorate in rosso e giallo, per poi passare alle quattro del **tetragramma** (quattro linee e tre spazi) attribuito a **Guido d'Arezzo** durante la sua permanenza presso l'Abbazia di Pomposa; infine si introdusse una notazione per le durate (**Francone da Colonia**, XIII sec.) ottenuta proporzionalmente, cioè non indicando la durata effettiva della nota, ma la durata di essa in proporzione alle altre dello stesso brano.

Questo è un *Alleluia* gregoriano, scritto con i *neumi*; sotto lo ascoltiamo:



<http://www.youtube.com/watch?v=mW9VaKdH3OY&feature=related>

Guido d'Arezzo

Guido d'Arezzo (995-1050), monaco benedettino, nell' *Epistola ad Michaelem de ignoto canto* suggerisce una formula mnemonica per ricordare l'esatta intonazione dell'esacordo (i sei suoni allora utilizzati) assegnando a ciascuna nota un nome corrispondente alla prima sillaba di ogni verso dell'Inno a San Giovanni (la nota SI fu aggiunta in seguito dalle iniziali di Sancte Johannes)

UT queant laxis

REsonare fibris

MIra gestorum

FAmuli tuorum

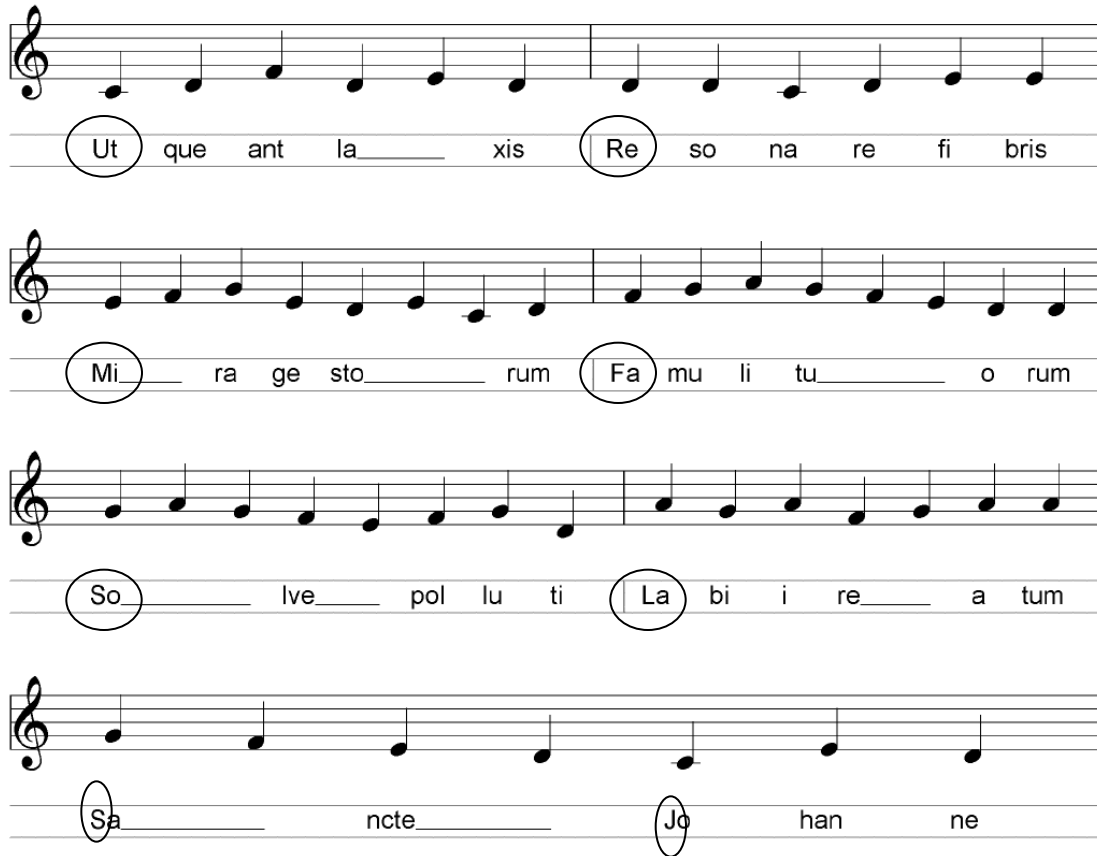
SOLve polluti

LABii reatum

Sancte **I**ohannes

Inoltre scrisse un trattato musicale, il *Micrologus de disciplina artis musicae*, in cui esaminò gli errori musicali del passato e riprese il concetto di diversa consonanza tra diverse frazioni; inoltre enumerò i vari tipi di scale e i modi musicali

Inno di San Giovanni



Ut que ant la xis Re so na re fi bris

Mi ra ge sto rum Fa mu li tu o rum

So lve pol lu ti La bi i re a tum

Sa ncte Jo han ne

The image shows a musical score for the hymn 'Inno di San Giovanni'. It consists of four staves of music, each with a treble clef and a key signature of one flat (B-flat). The lyrics are written below the notes. The first staff has the lyrics 'Ut que ant la xis Re so na re fi bris', with 'Ut' and 'Re' circled. The second staff has 'Mi ra ge sto rum Fa mu li tu o rum', with 'Mi' and 'Fa' circled. The third staff has 'So lve pol lu ti La bi i re a tum', with 'So' and 'La' circled. The fourth staff has 'Sa ncte Jo han ne', with 'Sa' and 'Jo' circled.

Ecco come suona:



Pentagramma

Il **Pentagramma** (dal greco penta, che vuol dire cinque e gramma, ovvero linea) è il **rigo musicale** in uso ai giorni nostri sul quale si scrivono le note. L'invenzione del pentagramma è attribuita a Ugolino da Orvieto (1430 circa).



Anche dopo l'introduzione del pentagramma, tra i musicisti non fu scelto subito il cinque, come numero perfetto per i righi musicali. Per lunghi periodi ha regnò l'arbitrio, e ogni autore decideva di suo gusto: anche per rendere meno facilmente decifrabile, cioè plagiabile, la sua musica.

Si sa di **Frescobaldi** che utilizzava fino a dieci righi, e per diletto scriveva a piè di pagina delle sue opere:

Intendetemi voi ch'io ben m'intendo.

Tipi di Pentagramma

Il pentagramma è composto da cinque linee parallele e quattro spazi che intercorrono tra le linee. Le linee e gli spazi si contano dal basso all'alto.

Il pentagramma può essere:

Semplice per la voce umana e per tutti gli strumenti musicali di limitata estensione fonica (es. archi e fiati), con gamma nel registro centrale o acuto



Doppio, formato da due pentagrammi semplici uniti da una graffa, usato da altri strumenti come il pianoforte, l'arpa, la fisarmonica etc., che permettono di distinguere i suoni prodotti dalla mano destra (rigo superiore) e dalla mano sinistra (rigo inferiore)

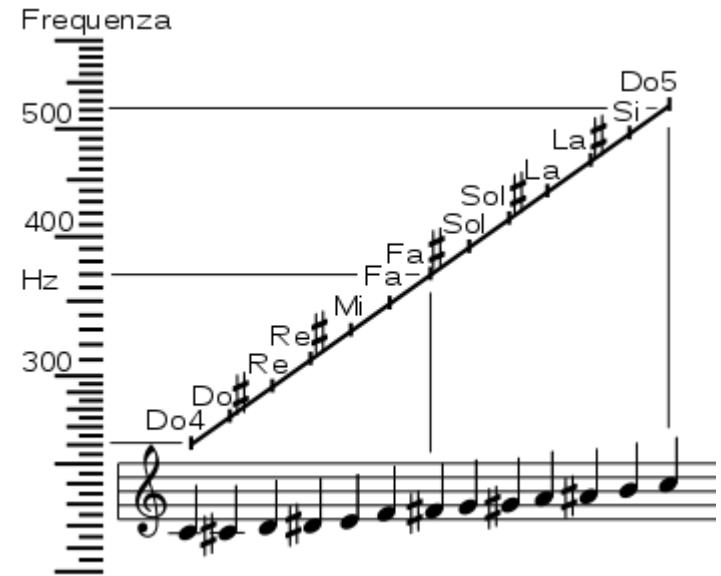


Triplo, per le musiche per organo (due pentagrammi per la tastiera e uno per la pedaliera)

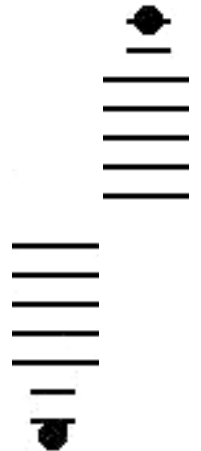
Multiplo, per le composizioni per diversi strumenti musicali

Pentagramma= riferimento cartesiano dello spazio delle note

Sull' **asse delle ordinate** abbiamo le **frequenze**, ovvero l'**altezza** delle note indicata col loro nome. Ogni rigo e ogni spazio del pentagramma ne definisce una, ma il pentagramma può essere esteso con note *sopra le righe (e sotto)*.



Il pentagramma potrebbe essere un n - gramma, con tanti rigi e spazi quante sono le note effettivamente usate in musica (potrebbero essere tante quanti sono gli 88 tasti di un pianoforte gran coda): un bell'affollamento; vedremmo le note galleggiare in un foglio interamente rigato. Per ridurre il numero dei rigi si sono introdotte le **chiavi**, per restringere gli intervalli delle altezze



Chiavi



- **chiave di SOL**, detta *di violino* perché rappresenta tutte le frequenze raggiungibili da quello strumento; fissa la posizione della nota SOL (una quinta sopra al Do centrale – il D04 della tastiera del pianoforte) sulla seconda linea del pentagramma
- **chiave di FA** detta *di basso* rappresenta le note più gravi, cantabili appunto dalla voce di basso; fissa la posizione della nota FA (una quinta sotto al Do centrale) sulla quarta linea del pentagramma
- **chiavi di DO** (fissano il Do) o anche *di contralto*, di *soprano*, di *baritono* etc.

DO RE MI FA SOL LA SI

DO RE MI FA SOL LA SI

Chiavi di SOL

Chiavi di DO

Chiavi di FA



Violino francese Violino

Soprano Mezzo-soprano

Alto

Tenore

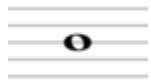
Baritono

Basso

Subbasso

Ascissa=durata

Sull'asse delle **ascisse** abbiamo la **durata** delle note: si potrebbe indicare ogni nota con un segmento, di lunghezza calcolata sull'unità delle ascisse (in questo modo grafico scrivono musica i computer prima di tradurre in notazione classica). Ma questa grafia sarebbe illeggibile per uno strumentista. Si è scelto di utilizzare dei simboli che si adattano a ogni nota e ne indicano la durata tradotta nel numero di unità di tempo o suoi sottomultipli.



Semibreve 4/4



Croma 1/8



Minima 2/4



Semicroma 1/16



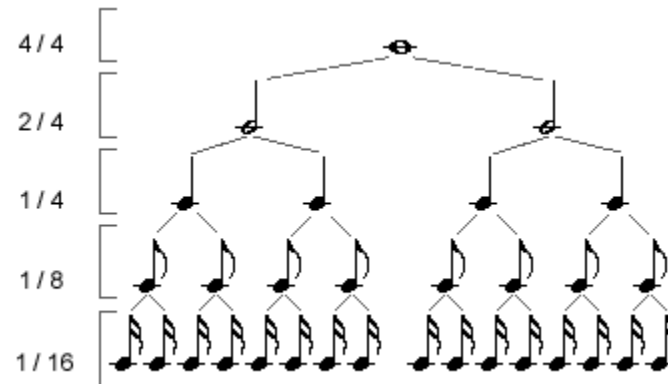
Semiminima 1/4



Biscroma 1/32

Valori delle note

Riassumendo:



Esempio: tempo 4/4 (*tempo ordinario*)



Metronomo

I valori delle note sono quarti, ottavi e sedicesimi dell'**unità di tempo**: la sua durata viene ora affidata al **metronomo** inventato nel 1812 da Johann Nepomuk Mälzel, amico di Ludwig Van Beethoven, che a questa invenzione dedicherà l'ottava sinfonia: nel secondo movimento c'è un chiaro riferimento al battito del metronomo: ascoltiamolo

<http://www.youtube.com/watch?v=3sVrYEFF00Y&feature=fvsvr>

Prima si segnavano le indicazioni di tempo in italiano (*allegro, presto, etc.*), ora si indica il tempo di metronomo, espresso in battiti per minuto, insieme con eventuali indicazioni di *movimento* o di *espressione*. Le indicazioni di espressione sono scritte in italiano, o in lingua madre; alcuni compositori ne fanno largo uso: Gustav Mahler in qualche caso ha dato indicazioni di tempo e di espressione a ogni battuta, nella speranza – vana - di rendere sempre più oggettiva la grafia musicale (qui c'è un esempio tratto dalla 8 Sinfonia).

The image displays a musical score for Gustav Mahler's 8th Symphony, 2nd movement, with various tempo and expression markings. The score is divided into four systems, each with a treble clef and a key signature of two sharps (D major). The tempo markings include *Poco adagio*, *Tacet bis*, *Sempre l'istesso tempo*, *Gehalten. Wieder tempo.*, *a tempo*, *Meno mosso.*, *Sehr langsam (immer Halbe).*, and *Poco piu mosso.* Expression markings include *zoll*, *etwas ruhiger*, *noch breiter*, and *mehr zurückhaltend*. The score also features *D.M. Solo.* and *Vi. Solo* markings. The lyrics are: *Höch-ste Herr-sche-rin der Welt · Las-se mich im blau-en aus-gespannten Him - mels -* (measures 89-90), *zell -* (measure 90), *1 7 8 6 1 6 9 7 1* (measures 91-96), *1 8 3* (measures 97-99), and *1 3 8 8 8* (measures 100-104). The score is numbered 89 through 104.

Grafico di una melodia

Consideriamo il piano (Oxy); **sull'asse x** riportiamo il **tempo** (successione di battiti ad intervalli costanti, per es. prodotti da un metronomo) e **sull'asse y** l'**altezza** del suono in ordine crescente

- Scegliamo $y=0$ l'altezza della nota **SOL₄**
- **Unità di misura**: per l'asse x, il battito della **semiminima**; per l'asse y il **semitono** temperato. 1quadretto orizzontale = 1 semiminima, 1 quadretto verticale=1 tono
L'unità di misura può cambiare a seconda della partitura (si guarda il valore minimo delle note)

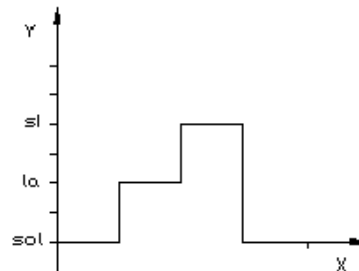
Una melodia può essere rappresentata dal grafico di una funzione $y=f(x)$.

Si rappresenta il grafico di f mediante quadretti che simultaneamente indicano il valore di durata di ogni singolo suono, e l'altezza assoluta di ognuno di essi (riferita alla scala temperata): il grafico è una funzione a scala

Ad esempio: la melodia



è rappresentata dal grafico



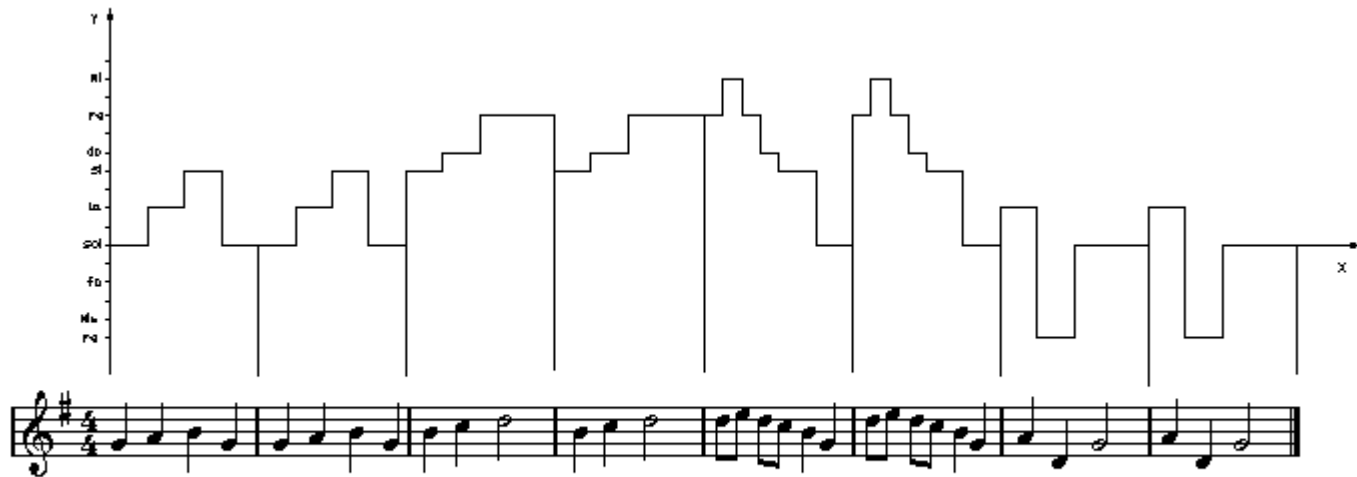
Ascoltiamola:



FJ_prima.not

Grafico di Fra' Martino

Vediamo, come esempio, il 'grafico' della melodia *Fra' Martino*, e sotto la scrittura usuale; poi la ascoltiamo, nota per nota:



FrereJacques.net

Isometrie – Gruppi di Simmetrie

Definizione: **Isometria** (dello spazio) è un'applicazione (biunivoca e continua) dello spazio in sé, che conserva la distanza. (E' sinonimo di *moto rigido*)

- Esempi di isometrie sono: le **traslazioni**, le **riflessioni** e le **rotazioni**.
- Diciamo che una figura è *simmetrica* se su di essa si possono applicare alcune isometrie che lasciano l'intera figura immutata (non punto per punto, ma come insieme di punti: diciamo che tali isometrie *fissano la figura*).
Precisamente:

Definizione . Sia F una figura piana e $\sigma \in \mathcal{M}$ un' isometria del piano.
 σ si dice **simmetria di F** se $\sigma(F) = F$ (cioè σ è un'isometria che fissa la figura F)

Esempio: un quadrato presenta otto simmetrie: quattro rotazioni (di uno, due, o tre quarti di giro + l'identità = rotazione di angolo 0), quattro riflessioni (due rispetto alle diagonali, due rispetto alle mediane). Un quadrato non ha simmetrie di traslazione; invece una rete di maglie quadrate che ricopre un piano possiede un'infinità di simmetrie di traslazione: uno scivolamento di un numero intero di righe o di colonne la lascia globalmente invariante.

Isometrie del piano

Tra le isometrie del piano distinguiamo

1) moti che conservano l'orientamento:

- **traslazione** di un vettore \mathbf{a}
- **rotazione** di un angolo θ intorno ad un punto P

2) moti che invertono l'orientamento:

- **riflessione** o ribaltamento intorno ad una retta r
- **glissoriflessione**, cioè il movimento ottenuto componendo una riflessione intorno ad una retta r e una traslazione mediante un vettore parallelo ad r

Teorema - Ogni isometria del piano è una traslazione o una rotazione o una riflessione o una glissoriflessione

Per oggetti in tre dimensioni, i gruppi di simmetria sono molto complessi: ad esempio, esistono 230 tipi diversi di gruppi di simmetria dei cristalli.

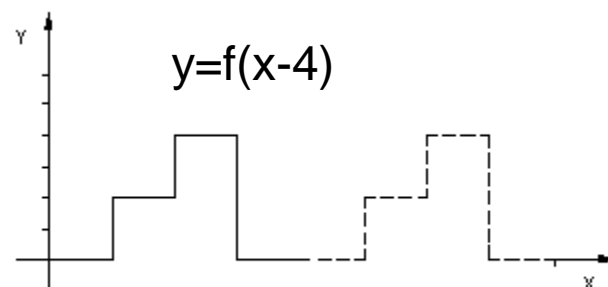
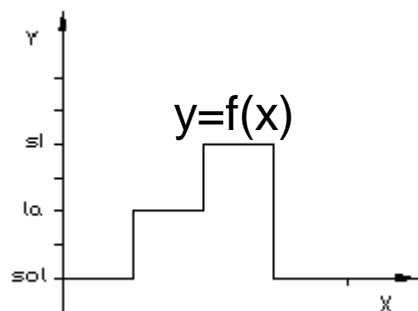
Traslazioni orizzontali

Chiamiamo T_n la traslazione (orizzontale) di n unità orizzontali, cioè nel tempo

$$T_n: f(x) \rightarrow f(x-n)$$

Nel caso di *Fra' Martino*, applichiamo una traslazione di 4 semiminime

$$T_4: f(x) \rightarrow f(x-4)$$



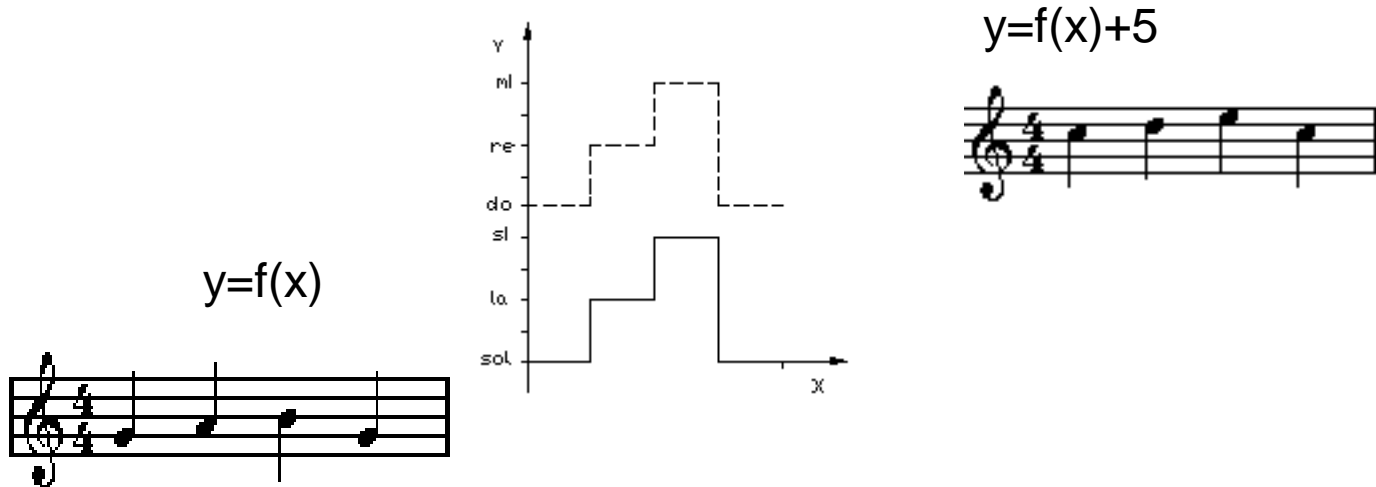
Ascoltiamo il tema di *Fra' Martino* traslato nel tempo: c'è una battuta vuota, e poi il solito tema:



FJ_t-4_prima.not

Traslazioni verticali

Innalziamo la nostra melodia di 5 semitoni (la prima nota passa da Sol a Do)



Chiamiamo V_n la traslazione verticale di n unità verticali, cioè in altezza; in questo caso di 5 semitoni

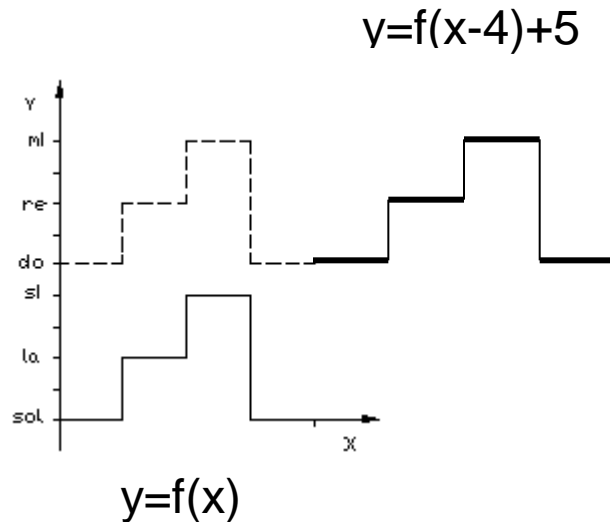
$$V_5: f(x) \rightarrow f(x)+5$$



fra_martino_+2.5.not

Traslazioni oblique

Sono la composizione di una traslazione verticale con una orizzontale (o di una orizzontale con una verticale non conta l'ordine, il risultato è lo stesso)
Nel caso di *'Fra Martino'*, il risultato è una battuta vuota e poi la melodia innalzata di una terza maggiore (5 semitoni):



$$T_4 \quad V_5: f(x) \rightarrow f(x)+5 \rightarrow f(x-4)+5$$

Traslazione 'approssimata'

Traslazione 'approssimata': le figure musicali sono traslate, ma ogni volta sono lievemente modificate variando il numero dei semitoni per mantenere la giusta struttura armonica, cioè lo schema tonale iniziale: ad esempio, se una melodia è scritta in Do maggiore, una traslazione verticale cambia i semitoni tra le note (si uscirebbe dalla tonalità, quindi si 'aggiustano' i semitoni)

Questo è l'inizio della
Toccata e Fuga in Re
minore, BWV 565, per
organo, di J. S. Bach
Qui è suonata da Kark
Richter sull'organo
della Basilica di
Ottobeuren

http://www.youtube.com/watch?v=Zd_olFy1m_xM

Adagio.



Manuale.

Pedale.

Prestissimo.



Canone

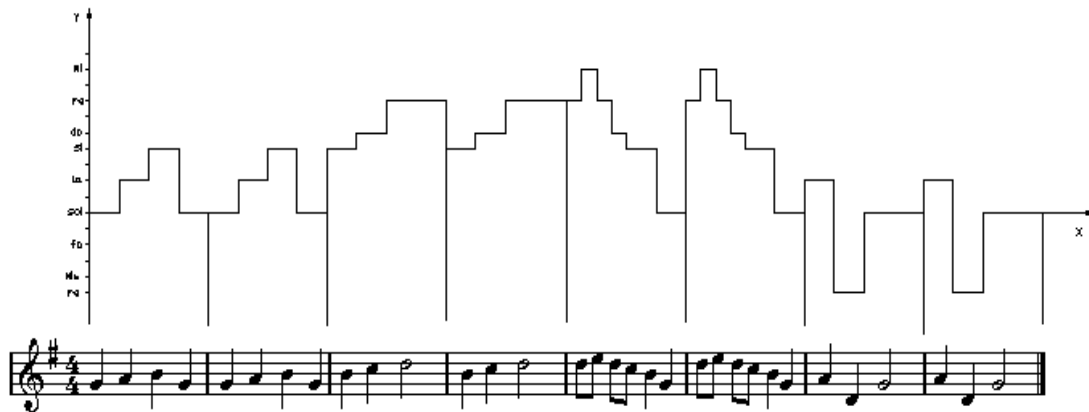
Un **canone** è una composizione che unisce ad una melodia una o più imitazioni, che le si sovrappongono progressivamente.

Il canone può essere classificato in base al **numero delle voci**, all'**intervallo** al quale ciascuna imitazione successiva è trasposta rispetto all'antecedente, al fatto che le **voci** siano ***inverse***, ***retrograde*** o ***retrograde e inverse***.

Si dice ***all'unisono*** se le voci cantano la stessa melodia, traslata nel tempo.

Le traslazioni (orizzontali, verticali e oblique) sono alla base di molti canoni. Per descrivere i canoni inversi, retrogradi o retrogradi inversi sono necessarie le riflessioni.

Fra' Martino e i canoni all'unisono



Sentiamo come suona il canone:



FrereJacques_canone.not

Prendiamo le 8 battute del tema di 'Fra Martino' e le sovrapponiamo con altre (infinite?) copie, traslate ognuna di 2 battute (da pensare come 16 /8, cioè 16 crome); ad ogni nuova 'voce' si applica T_{16} . Quando ogni singola voce finisce, ricomincia da capo (cioè le si applica T_{128})

Canone alla quinta

Questo è il Canone a 4 voci *alla quinta* BWV 1073, composto da Bach per l'amico organista J.G. Walther; è alla quinta perché ogni nuova voce legge il tema traslato di una quinta in altezza (7 semitoni). Ogni voce entra dopo un intervallo di 2/4. Le 4 chiavi all'inizio del rigo si riferiscono alle 4 voci, ogni voce legge nella sua chiave – basso, tenore, mezzosoprano e violino=soprano.

I segni sopra il rigo indicano gli ingressi delle voci:

2 voce: T_8 V_7
8 semicrome = 2/4; 7 semitoni = quinta

3 voce: T_{16} V_{14}

4 voce: T_{24} V_{21}

Si noti che la somma di W+A+L+T+H+E+R è 82 (2x41). La partitura è di 14 misure.

Ascoltiamolo nell'esecuzione dell'Ensemble *Musica Antiqua Köln*:

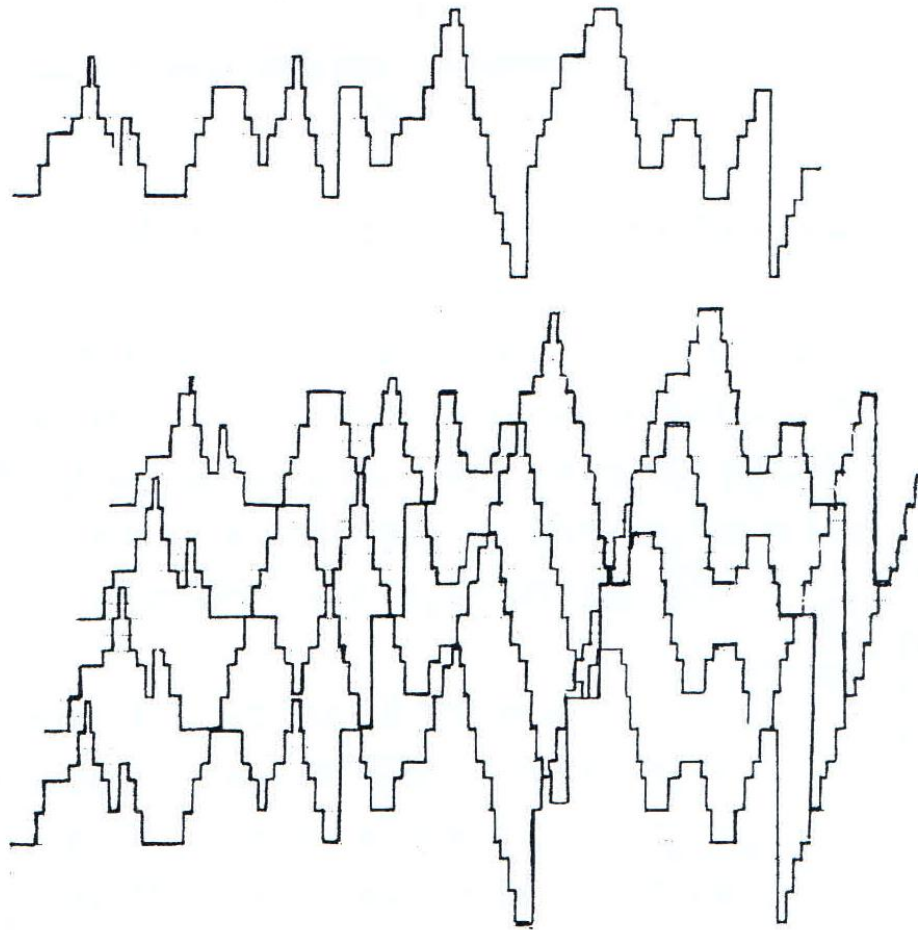


Weimar, den 2. Aug: 1713

*Dieses wenige wolte dem Herrn
Besizer zu geneigtem An-
gedencken hier einzeichnen
Job: Sebast. Bach.
Fürstlich Sächsischer HoffOrg. v.
Cammer Musicus*

<http://www.youtube.com/watch?v=jZT1u1g6hmo>

Grafico del canone BWV 1073



Variazioni Goldberg

Un tema semplicissimo subisce 30 elaborazioni, di cui tutte quelle multiple di 3 sono canoni:

Variazione 3: Canone all'unisono T_{24}

Variazione 6: Canone alla seconda $T_{24} V_2$

Variazione 9: Canone alla terza $T_8 V_{-4}$

Variazione 12: Canone alla quarta in moto contrario $T_{12} L_{-14}$

Variazione 15: Canone alla quinta in moto contrario $T_8 L_{-5}$

Variazione 18: Canone alla sesta $T_4 V_8$

Variazione 21: Canone alla settima $T_8 V_{11}$

Variazione 24: Canone all'ottava $T_{18} V_{-12}$

Variazione 27: Canone alla nona $T_{12} V_{14}$

L'evento (forse) all'origine della composizione, sarebbe la richiesta di un allievo di Bach, J. G. Goldberg, di avere una composizione cembalistica lunga per suonarla durante le notti insonni del suo mecenate conte von Keyserling (Goldberg nel 1742 aveva 15 anni, e pare improbabile che sapesse suonarle)

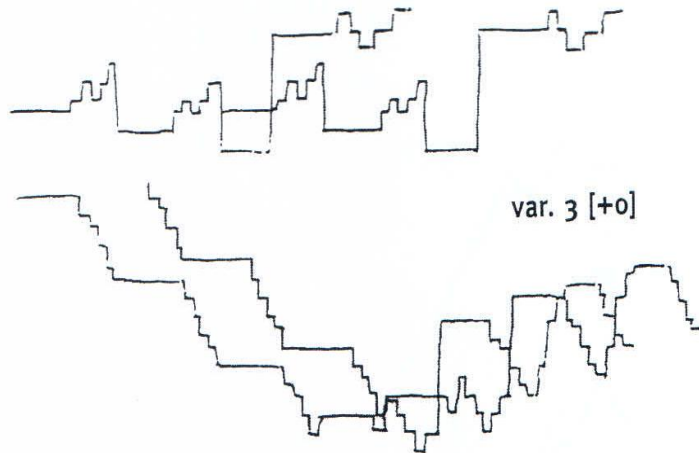
Ecco il tema noto come **Aria**; lo ascoltiamo suonato da Glenn Gould (e poi da Barenboim):

http://www.youtube.com/watch?v=Gv94m_S3QDo&feature=related

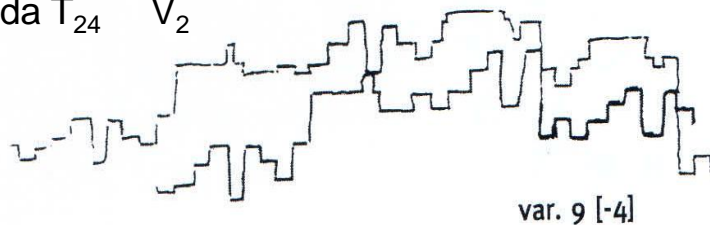
The image shows the beginning of the Aria from the Goldberg Variations. It is written for a single melodic line in G major and 3/4 time. The first measure starts with a half note G4, followed by quarter notes A4, B4, and C5. The second measure continues with quarter notes B4, A4, and G4. The third measure has a half note G4. The fourth measure is a half note G4. The fifth measure has a half note G4. The sixth measure has a half note G4. The seventh measure has a half note G4. The eighth measure has a half note G4. The ninth measure has a half note G4. The tenth measure has a half note G4. The eleventh measure has a half note G4. The twelfth measure has a half note G4. The thirteenth measure has a half note G4. The fourteenth measure has a half note G4. The fifteenth measure has a half note G4. The sixteenth measure has a half note G4. The seventeenth measure has a half note G4. The eighteenth measure has a half note G4. The nineteenth measure has a half note G4. The twentieth measure has a half note G4. The twenty-first measure has a half note G4. The twenty-second measure has a half note G4. The twenty-third measure has a half note G4. The twenty-fourth measure has a half note G4. The twenty-fifth measure has a half note G4. The twenty-sixth measure has a half note G4. The twenty-seventh measure has a half note G4. The twenty-eighth measure has a half note G4. The twenty-ninth measure has a half note G4. The thirtieth measure has a half note G4. The thirty-first measure has a half note G4. The thirty-second measure has a half note G4. The thirty-third measure has a half note G4. The thirty-fourth measure has a half note G4. The thirty-fifth measure has a half note G4. The thirty-sixth measure has a half note G4. The thirty-seventh measure has a half note G4. The thirty-eighth measure has a half note G4. The thirty-ninth measure has a half note G4. The fortieth measure has a half note G4. The forty-first measure has a half note G4. The forty-second measure has a half note G4. The forty-third measure has a half note G4. The forty-fourth measure has a half note G4. The forty-fifth measure has a half note G4. The forty-sixth measure has a half note G4. The forty-seventh measure has a half note G4. The forty-eighth measure has a half note G4. The forty-ninth measure has a half note G4. The fiftieth measure has a half note G4. The fifty-first measure has a half note G4. The fifty-second measure has a half note G4. The fifty-third measure has a half note G4. The fifty-fourth measure has a half note G4. The fifty-fifth measure has a half note G4. The fifty-sixth measure has a half note G4. The fifty-seventh measure has a half note G4. The fifty-eighth measure has a half note G4. The fifty-ninth measure has a half note G4. The sixtieth measure has a half note G4. The sixty-first measure has a half note G4. The sixty-second measure has a half note G4. The sixty-third measure has a half note G4. The sixty-fourth measure has a half note G4. The sixty-fifth measure has a half note G4. The sixty-sixth measure has a half note G4. The sixty-seventh measure has a half note G4. The sixty-eighth measure has a half note G4. The sixty-ninth measure has a half note G4. The seventieth measure has a half note G4. The seventy-first measure has a half note G4. The seventy-second measure has a half note G4. The seventy-third measure has a half note G4. The seventy-fourth measure has a half note G4. The seventy-fifth measure has a half note G4. The seventy-sixth measure has a half note G4. The seventy-seventh measure has a half note G4. The seventy-eighth measure has a half note G4. The seventy-ninth measure has a half note G4. The eightieth measure has a half note G4. The eighty-first measure has a half note G4. The eighty-second measure has a half note G4. The eighty-third measure has a half note G4. The eighty-fourth measure has a half note G4. The eighty-fifth measure has a half note G4. The eighty-sixth measure has a half note G4. The eighty-seventh measure has a half note G4. The eighty-eighth measure has a half note G4. The eighty-ninth measure has a half note G4. The ninetieth measure has a half note G4. The hundredth measure has a half note G4. The hundred and first measure has a half note G4. The hundred and second measure has a half note G4. The hundred and third measure has a half note G4. The hundred and fourth measure has a half note G4. The hundred and fifth measure has a half note G4. The hundred and sixth measure has a half note G4. The hundred and seventh measure has a half note G4. The hundred and eighth measure has a half note G4. The hundred and ninth measure has a half note G4. The hundred and tenth measure has a half note G4. The hundred and eleventh measure has a half note G4. The hundred and twelfth measure has a half note G4. The hundred and thirteenth measure has a half note G4. The hundred and fourteenth measure has a half note G4. The hundred and fifteenth measure has a half note G4. The hundred and sixteenth measure has a half note G4. The hundred and seventeenth measure has a half note G4. The hundred and eighteenth measure has a half note G4. The hundred and nineteenth measure has a half note G4. The hundred and twentieth measure has a half note G4. The hundred and twenty-first measure has a half note G4. The hundred and twenty-second measure has a half note G4. The hundred and twenty-third measure has a half note G4. The hundred and twenty-fourth measure has a half note G4. The hundred and twenty-fifth measure has a half note G4. The hundred and twenty-sixth measure has a half note G4. The hundred and twenty-seventh measure has a half note G4. The hundred and twenty-eighth measure has a half note G4. The hundred and twenty-ninth measure has a half note G4. The hundred and thirtieth measure has a half note G4. The hundred and thirty-first measure has a half note G4. The hundred and thirty-second measure has a half note G4. The hundred and thirty-third measure has a half note G4. The hundred and thirty-fourth measure has a half note G4. The hundred and thirty-fifth measure has a half note G4. The hundred and thirty-sixth measure has a half note G4. The hundred and thirty-seventh measure has a half note G4. The hundred and thirty-eighth measure has a half note G4. The hundred and thirty-ninth measure has a half note G4. The hundred and fortieth measure has a half note G4. The hundred and forty-first measure has a half note G4. The hundred and forty-second measure has a half note G4. The hundred and forty-third measure has a half note G4. The hundred and forty-fourth measure has a half note G4. The hundred and forty-fifth measure has a half note G4. The hundred and forty-sixth measure has a half note G4. The hundred and forty-seventh measure has a half note G4. The hundred and forty-eighth measure has a half note G4. The hundred and forty-ninth measure has a half note G4. The hundred and fiftieth measure has a half note G4. The hundred and fifty-first measure has a half note G4. The hundred and fifty-second measure has a half note G4. The hundred and fifty-third measure has a half note G4. The hundred and fifty-fourth measure has a half note G4. The hundred and fifty-fifth measure has a half note G4. The hundred and fifty-sixth measure has a half note G4. The hundred and fifty-seventh measure has a half note G4. The hundred and fifty-eighth measure has a half note G4. The hundred and fifty-ninth measure has a half note G4. The hundred and sixtieth measure has a half note G4. The hundred and sixty-first measure has a half note G4. The hundred and sixty-second measure has a half note G4. The hundred and sixty-third measure has a half note G4. The hundred and sixty-fourth measure has a half note G4. The hundred and sixty-fifth measure has a half note G4. The hundred and sixty-sixth measure has a half note G4. The hundred and sixty-seventh measure has a half note G4. The hundred and sixty-eighth measure has a half note G4. The hundred and sixty-ninth measure has a half note G4. The hundred and seventieth measure has a half note G4. The hundred and seventy-first measure has a half note G4. The hundred and seventy-second measure has a half note G4. The hundred and seventy-third measure has a half note G4. The hundred and seventy-fourth measure has a half note G4. The hundred and seventy-fifth measure has a half note G4. The hundred and seventy-sixth measure has a half note G4. The hundred and seventy-seventh measure has a half note G4. The hundred and seventy-eighth measure has a half note G4. The hundred and seventy-ninth measure has a half note G4. The hundred and eightieth measure has a half note G4. The hundred and eighty-first measure has a half note G4. The hundred and eighty-second measure has a half note G4. The hundred and eighty-third measure has a half note G4. The hundred and eighty-fourth measure has a half note G4. The hundred and eighty-fifth measure has a half note G4. The hundred and eighty-sixth measure has a half note G4. The hundred and eighty-seventh measure has a half note G4. The hundred and eighty-eighth measure has a half note G4. The hundred and eighty-ninth measure has a half note G4. The hundred and ninetieth measure has a half note G4. The hundred and ninety-first measure has a half note G4. The hundred and ninety-second measure has a half note G4. The hundred and ninety-third measure has a half note G4. The hundred and ninety-fourth measure has a half note G4. The hundred and ninety-fifth measure has a half note G4. The hundred and ninety-sixth measure has a half note G4. The hundred and ninety-seventh measure has a half note G4. The hundred and ninety-eighth measure has a half note G4. The hundred and ninety-ninth measure has a half note G4. The two hundredth measure has a half note G4.

Grafici delle Variazioni Goldberg 3-6-9-18-21-24

Variazione 3: Canone all'unisono T_{24}

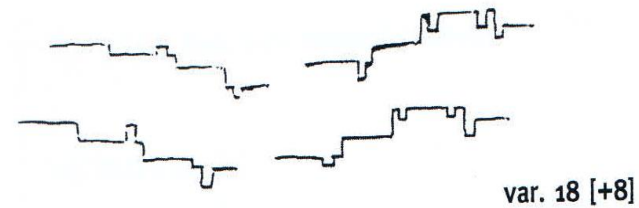


Variazione 6: Canone
alla seconda T_{24} V_2

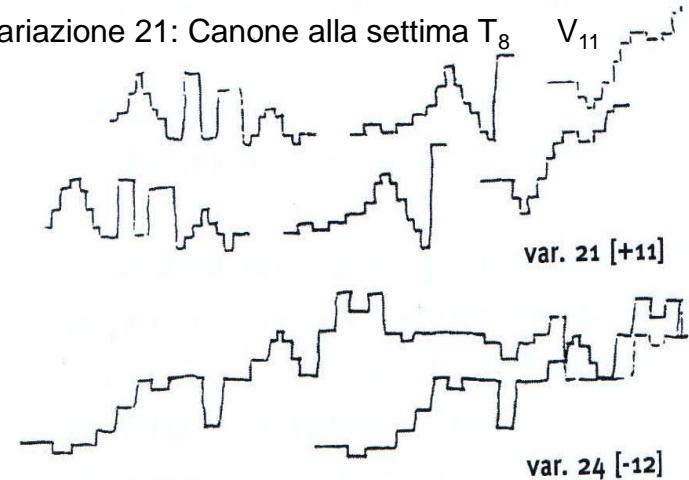


Variazione 9: Canone alla terza T_8 V_{-4}

Variazione 18: Canone alla sesta T_4 V_8



Variazione 21: Canone alla settima T_8 V_{11}



Variazione 24: Canone all'ottava T_{18} V_{-12}

Variation Goldberg 27

Variation 27: canone alla Nona; suona Grigorij Sokolov

<http://www.youtube.com/watch?v=7ZHC9H1reDU&playnext=1&list=PLB7AE736D681ADF98>

Variatio 27. Canone alla Nona. a 1 Clav.

BWV 988

Clavier

The first system of musical notation shows measures 1 through 3. The treble clef staff begins with a whole rest in measure 1, followed by a melodic line in measures 2 and 3. The bass clef staff features a rhythmic accompaniment of eighth notes in measure 1, rests in measure 2, and eighth notes in measure 3. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 6/8.

The second system of musical notation shows measures 4 through 6. The treble clef staff has a melodic line starting in measure 4, a rest in measure 5, and a melodic line in measure 6. The bass clef staff has a rhythmic accompaniment of eighth notes in measure 4, eighth notes in measure 5, and eighth notes in measure 6. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 6/8.

Canone dalla *Sinfonia Pastorale*

<https://www.youtube.com/watch?v=t2VY33VXnrQ>

Viol1
Viol2
Viola
Vlc

Fl
Ob
Cl
Fag

The image shows two systems of musical notation. The first system contains staves for Violin 1, Violin 2, Viola, and Violoncello/Double Bass. The second system contains staves for Flute, Oboe, Clarinet, and Bassoon. The notation includes various musical symbols such as notes, rests, and dynamic markings like 'arco.' and 'cresc.'.

Fl
Cl
Fag
Viol1
Viol2

The image shows a system of musical notation for Flute, Clarinet, Bassoon, Violin 1, and Violin 2. The notation includes various musical symbols such as notes, rests, and dynamic markings like 'cresc.'.

Il secondo tema del 1 Movimento della Sinfonia n. 6 *Pastorale* di Beethoven è un altro esempio di Canone, esposto dagli archi, poi ripreso dal Clarinetti, poi da fagotti e flauti. Sentiamo l'inizio, nell'esecuzione dei Boston Symphony Orchestra diretti da H. L. Bernstein. Il tema a canone inizia dopo circa 1'20''

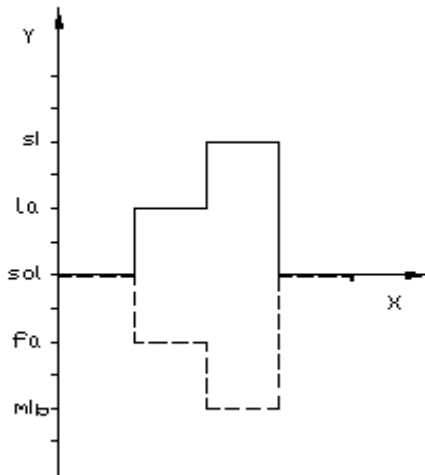
Riflessioni in musica

Riflessione rispetto ad un asse orizzontale (asse x)

Indichiamo con R_x la riflessione rispetto all'asse x, in cui l'origine è il SOL4

$$R_x: f(x) \rightarrow -f(x)$$

Se l'origine è una nota di altezza n la indichiamo con R_{x_n}



Ecco i grafici e la scrittura sul pentagramma della 1 battuta di *Fra' Martino*

e della sua riflessione R_x

Ascoltiamo come suonano:



FraMartino_rx_prima.not

Riflessione orizzontale di *Fra' Martino*

Qui sono i due spartiti a confronto di *Fra' Martino* e della sua Rx



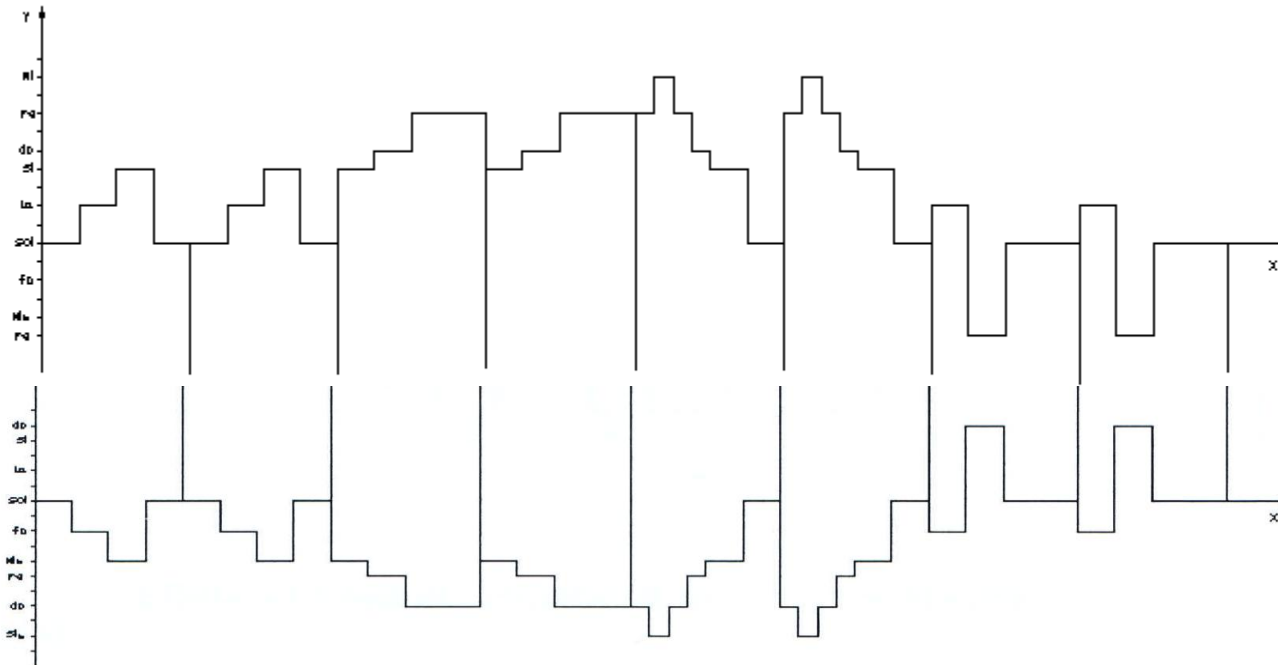
Ascoltiamo l'effetto completo della simmetria rispetto all'asse x (dove l'origine è il sol) su *Fra' Martino*; si sente una melodia malinconica, siamo passati in tono minore



FrereJacques_or_simmx.net

Grafici di *Fra' Martino* $f(x)$ e di $-f(x)$

Ecco i due grafici speculari (lo specchio è l'asse delle x , quasi una linea d'acqua)



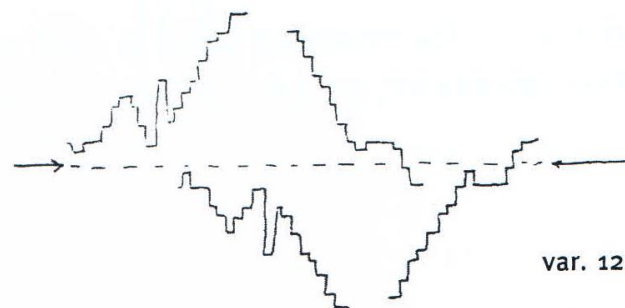
Grafici delle Variazioni Goldberg 12-15

Applicando alla melodia le simmetrie Rx in termini di funzione matematica, si può descrivere il **canone inverso** (o *in moto contrario*)

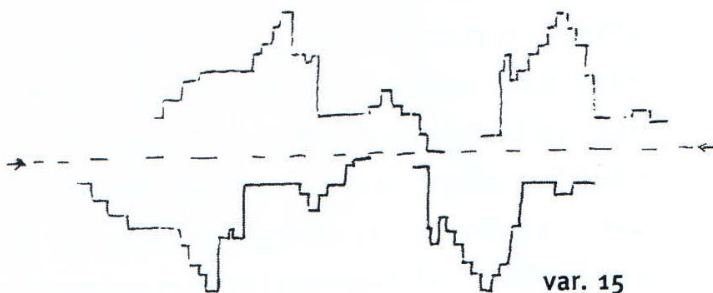
$$f(x) = \text{originale}; -f(x) = \text{inverso}$$

Esempi: le Variazioni Goldberg

Variatione 12: Canone alla quarta
in moto contrario $T_{12} \quad R_{x_2}$
(l'asse x ha origine sulla nota FA4)



Variatione 15: Canone alla quinta
in moto contrario $T_8 \quad R_{x_3}$
(l'asse x ha origine sul SIb4)



Variation Goldberg 15

Ecco la Variazione 15 (Canone alla quinta in moto contrario) eseguita da Kimiko Ishizaka, con una suggestiva visualizzazione:

<https://www.youtube.com/watch?v=ZuccL47vRFE>

Variatio 15. Canone alla Quinta (in moto contrario). a 1 Clav.

BWV 988

Clavier

Andante

3

Riflessione rispetto ad un asse verticale (asse y)

Indichiamo con R_y la riflessione rispetto all'asse y

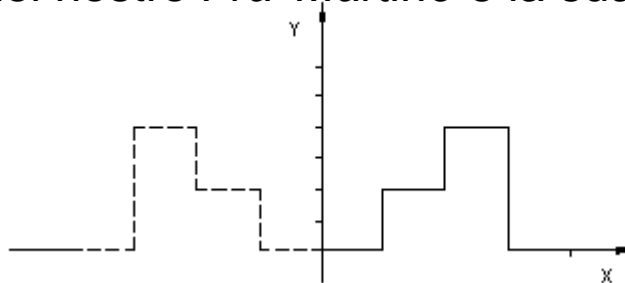
$$R_y: f(x) \rightarrow f(-x)$$

Esempio: una scala ascendente seguita da una scala discendente



Scala su e giù.not

Ecco la prima battuta del nostro *Fra' Martino* e la sua riflessione rispetto all'asse y



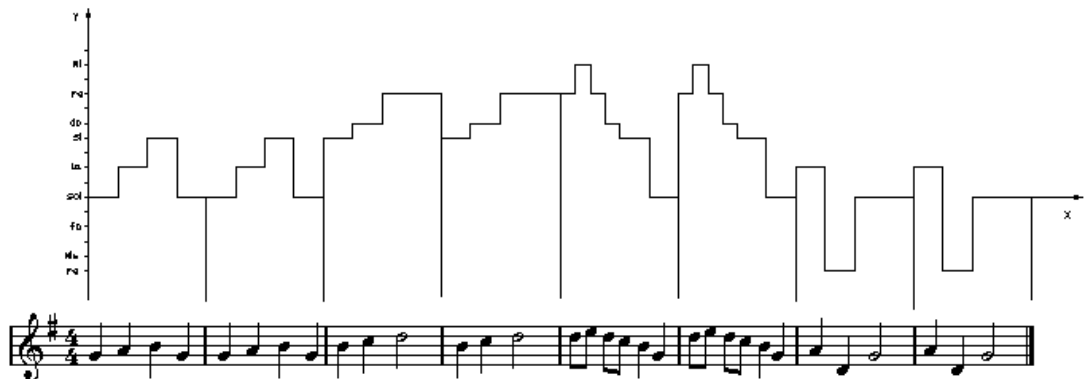
Ed ecco come suona:



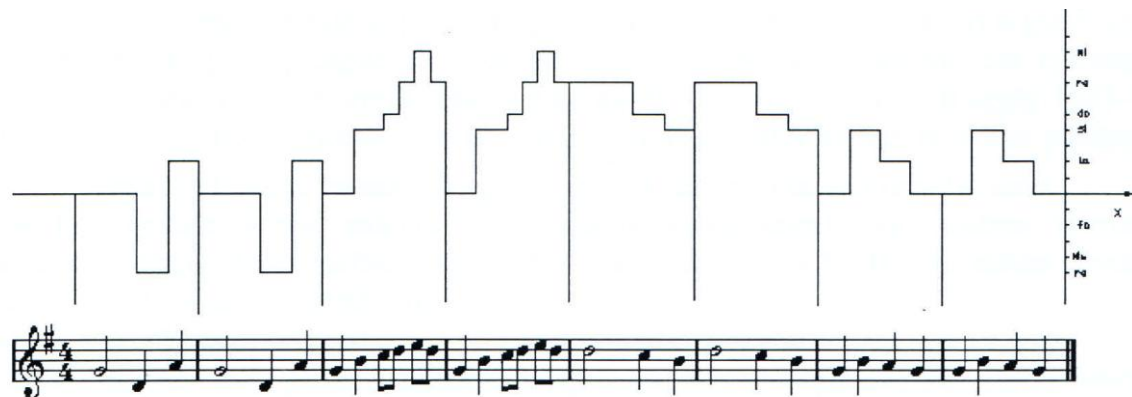
framartino_ry_prima.not

Riflessione verticale di *Fra' Martino*

Ecco come si presenta e come suona *Fra' Martino* per intero dopo una simmetria rispetto all'asse y: il carattere è diverso, sembra una marcia



FrereJacques_originale e simmy.not

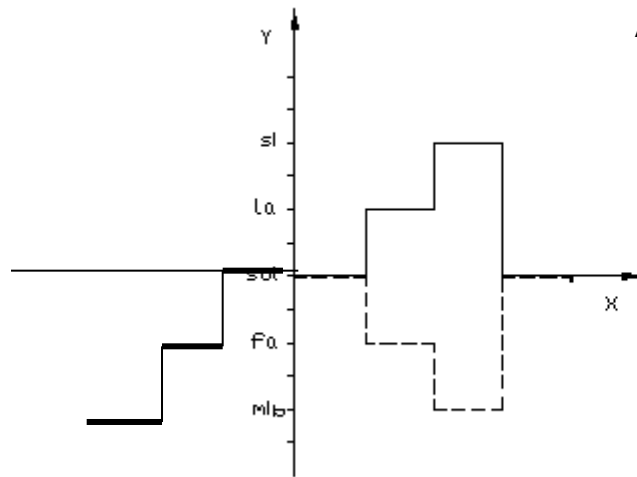


Simmetria rispetto all'origine

Componiamo la riflessione orizzontale R_x (rispetto all'asse x) con quella verticale R_y (rispetto all'asse y) (o viceversa, il risultato è identico) e otteniamo la simmetria R_0 rispetto all'origine

$$R_0 = R_x \ R_y : f(x) \rightarrow -f(-x)$$

Il grafico della melodia cui è stata applicata R_0 è il simmetrico rispetto all'origine del grafico iniziale



Ascoltiamo l'effetto di R_0 sulle prime due battute di *Fra' Martino* effettuando prima una R_x e poi una R_y



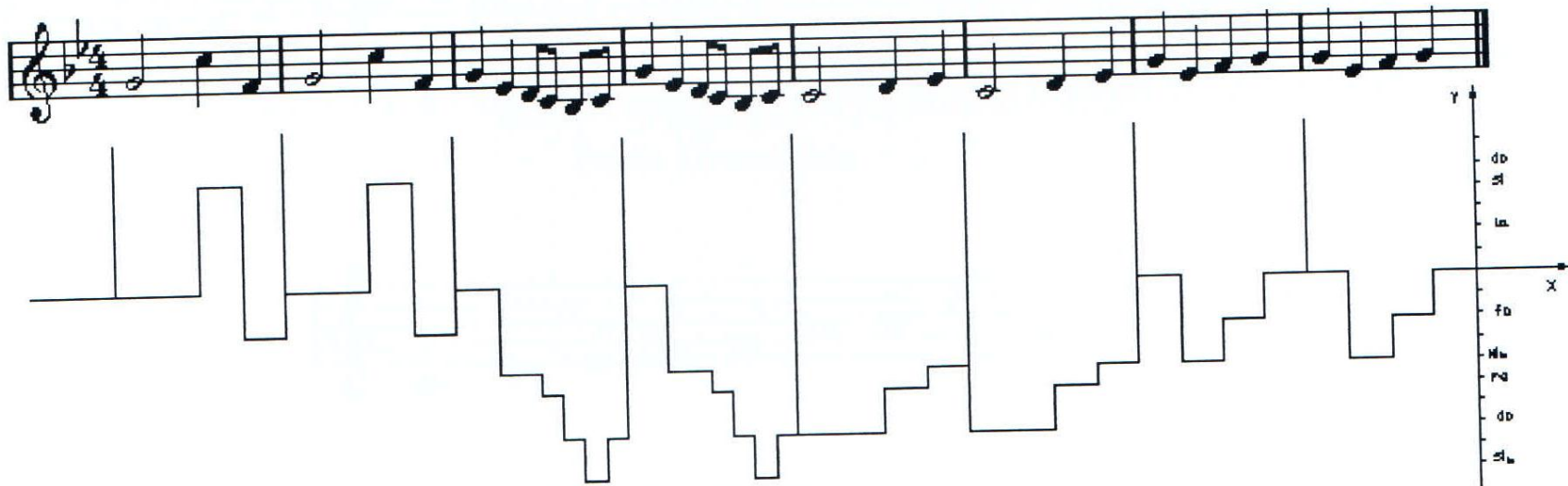
FraMartino_simmetria0_prima.not

Fra' Martino retrogrado inverso

Si può descrivere il canone ***inverso***, ***retrogrado*** o ***retrogrado e inverso*** in termini di funzione matematica, applicando alla melodia le simmetrie :
 $f(x)$ = originale; $-f(x)$ = inverso; $f(-x)$ = retrogrado; $-f(-x)$ = retrogrado inverso.
Ecco come si presenta e come suona l'intero *Fra' Martino* dopo una simmetria rispetto all'origine: si ottiene un canone retrogrado inverso; la melodia assume un carattere 'di marcia introspettiva'



FrereJacques_or_simO.not



Riflessione e traslazioni

In questo frammento dal per piano, *Capriccio* di Mozart, KV 395 osserviamo simmetrie rispetto ad asse verticale, traslazioni orizzontali e (ogni due gruppi ascendente-discendente) traslazioni verticali (ogni volta si abbassa di un semitono). Ascoltiamolo eseguito dal pianista W, Gieseking https://www.youtube.com/watch?v=gv_ExEhor6w

The image displays three systems of musical notation for the piano accompaniment of Mozart's Capriccio, KV 395. Each system consists of a grand staff with a treble clef on the upper staff and a bass clef on the lower staff. The music is written in a single melodic line across both staves, featuring a series of ascending and descending eighth-note patterns. The first system shows the initial pattern. The second system illustrates a horizontal translation (transposition) of the pattern. The third system shows a vertical translation (transposition) of the pattern, where the entire melodic line is shifted down by one semitone. The notation includes various accidentals (sharps and flats) and rests, and the piece concludes with a final cadence in the third system.

Der spiegel

Una composizione attribuita a Mozart,
Der Spiegel Duet: il top delle simmetrie!
Osserviamo lo spartito dall'inizio alla
fine, poi capovolgiamolo...

Ascoltiamolo guardando lo spartito: la
freccia verde segue la prima voce;

http://www.youtube.com/watch?v=trbMq_nHH9N8&feature=related

Qui si vede eseguita insieme da due
violini: uno parte dall'inizio e uno legge il
foglio a rovescio: la melodia suonata è
(quasi sempre) identica (ma parte
un'ottava più in basso)

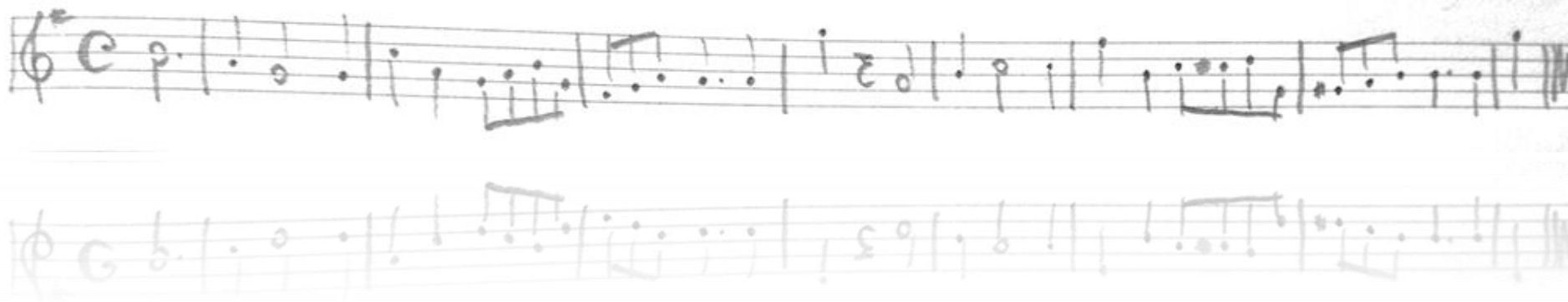
http://www.youtube.com/watch?v=M8QI_aV9ilWc&feature=related

Qui sono due mandolini:

http://www.youtube.com/watch?v=5J83R_K1cvw&feature=related

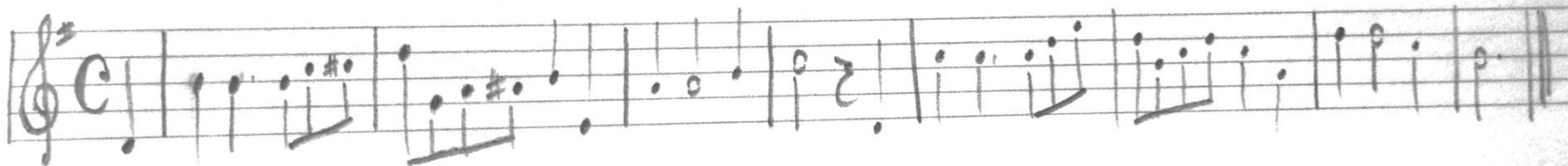
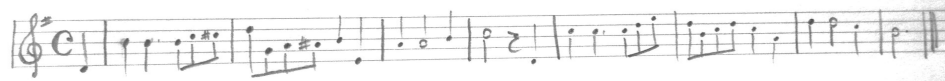
The image displays a musical score for 'Der Spiegel' in G major, 3/4 time. It consists of 14 staves of music. The first staff begins with a dynamic marking of 'mf'. The score is written for two violins, with the second violin part starting later than the first. The music is characterized by its symmetrical structure, with the second violin part often playing the first violin part upside down. At the bottom right of the score, there is a tempo marking 'Allegro'.

Una canzoncina



Canzoncina.not

Che canzoncina!



Canzoncina.net