Laboratorio didattico di

Matematica
e
Musica

La Matematica nella Musica
La Musica nella Matematica

14 giugno 2016
Luisella Caire
DISMA

Programma

Parte Prima: alla scoperta della Matematica nella Musica

1 – Excursus storico-aritmetico – Musica da Pitagora ai giorni nostri

Introduzione storica: da Pitagora a Bach, attraverso numeri razionali e non

2 – Excursus geometrico - Le simmetrie in Musica

Rappresentare la Musica

Gruppi di trasformazioni, gruppi di simmetria.

Trasformazioni in musica

Bach e altri musicisti-geometri

Parte Seconda: la Musica che viene dalla Matematica

Excursus creativo: analisi di alcune teorie matematiche utilizzabili (tra l'altro) per comporre musica (Automi Cellulari, L-Sistemi, metodi IFS dei Sistemi di Funzioni Iterate, Frattali)

Teorie matematiche nate per modellare i sistemi biologici: la matematica osserva la natura, cerca di spiegare e riprodurre ciò che fa e ne prende a prestito i metodi.

Si vogliono utilizzare questi metodi per capire come si può produrre la musica.

Prima Parte - 1

Relazioni tra Matematica e Musica da Pitagora ai giorni nostri

Introduzione storica

da Pitagora ad oggi, attraverso Cartesio, Bach e tanti altri
viaggiando tra numeri razionali, irrazionali e logaritmi

Interazioni
Matematica/Musica - Musica/matematica

Da un lato: i matematici cercano di scoprire nella musica gli aspetti teorici, algoritmi e i pattern nascosti, e gli scienziati in generale mostrano interesse verso i principi organizzativi nella musica

D'altro lato, spesso i compositori si volgono alle scienze per ampliare e rinnovare i loro modelli compositivi.
I modelli scientifici offrono un'importante componente: l'astrazione formale, che può essere di grande aiuto nello sviluppo di una composizione musicale.

Scienza: aiuta i compositori a combinare creatività artistica con rigore scientifico
Musica: interessante campo di applicazione delle nuove scoperte scientifiche

La matematica nella musica

Definizione che LEIBNIZ dà della musica:

Exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi

trad.: (*la musica è*) *un esercizio nascosto di aritmetica fatto da un animo che non sa di contare*

da *Epistolae ad diversos,* lettera 154 a Goldbach, 1712

Pitagora

Pitagora (560-480 a.C.) : sistema filosofico fondato investigando sui rapporti tra musica e matematica

Anziché rifarsi ai quattro elementi (aria, acqua, terra e fuoco- Talete, Eraclito) decise che l'essenza del mondo (così come quella del suono) è il **numero**

Pitagora riuscì a definire gli intervalli musicali con rapporti numerici, e ne ha dedusse che tutto può essere reso numericamente

Musica: concreta realizzazione della corrispondenza tra numeri e cose, scienza concreta dei numeri, in cui i rapporti sono direttamente percepibili

Di qui partì il suo pensiero filosofico numerico-ordinativo, l' ipotesi che l'Universo fosse retto da un'armonia universale, dove i movimenti dei vari corpi celesti erano regolati da rapporti numerici precisi

Per Pitagora, c'è *isomorfismo*

Matematica $\cong$ Musica $\cong$ Armonia dell'Universo

Numeri = chiave del sapere

Pensiero dei Pitagorici:

I rapporti di lunghezza di corde producono sempre l'ottava, la quinta e la quarta $\rightarrow$ dietro la bellezza della musica c'è una regolarità nascosta, non creata da noi e immutabile.

Regolarità aritmetiche o geometriche simili devono celarsi dietro la complessità della natura $\rightarrow$ Struttura razionale (= retta da numeri razionali) della natura $\rightarrow$ nei numeri c'è un potere, forse il potere stesso che ha creato l'universo

Numeri = chiave del sapere, della conoscenza che può innalzare l'anima fino all' immortalità, fino a unirsi col divino.

Il *kanon*, o Monocordo

Strumento di misurazione degli intervalli musicali: ***kanon***, o **monocordo:**

- tese una corda sopra una scala graduata e pizzicò la corda libera
  $\rightarrow$ lunghezza L, frequenza f
  (ad es. DO4 – il DO centrale del pianoforte).
- premendo la corda a metà della sua lunghezza $\rightarrow$ lunghezza ½ L, frequenza 2f
  (suono intonato una ottava sopra: DO_5)(intervallo di ***ottava***).

Premendo la corda in modo da intonarla a tutti gli altri suoni della teoria e della pratica musicale greca, verificò che ai diversi intervalli corrispondevano frazioni ordinate

- se la premeva in modo da dividerla in tre parti uguali $\rightarrow$ lunghezza L/3 frequenza 3f
  (una quinta sopra l'ottava: SOL5)(intervallo di ***quinta***)
- se la divideva in quattro parti uguali $\rightarrow$ lunghezza ¾ L, frequenza 4/3 f
  (una quarta: FA_4) (intervallo di ***quarta***)

La Musica contribuisce alla Matematica

La musica doveva essere ben importante, per i greci, se Pitagora partendo da essa ha concepito un tale sistema di pensiero.

La musica ovviamente già esisteva, e non aveva avuto bisogno di altro se non dei propri suoni, dell'orecchio e dell'apparato cognitivo umani per giudicarli, per riprodurli, per ricomporli; la matematica, invece, stava nascendo allora.

La matematica, nasce in parte ispirata dalla musica: si percepisce un ordine con l'orecchio, se ne cercano dei termini descrittivi → si sviluppa la matematica

Archita e le medie numeriche

Archita da Taranto (428-347 a. C.) fu il massimo esponente dellla scuola pitagorica. La sua fiducia nella matematica era totale:

Quando un ragionamento matematico è stato trovato, controlla le fazioni politiche e aumenta concordia, quando c'è manca l'ingiustizia, e regna l'uguaglianza.

Con il ragionamento matematico noi lasciamo da parte le differenze l'un con l'altro nei nostri comportamenti.

Attraverso esso i poveri prendono dai potenti, ed i ricchi danno ai bisognosi, entrambi hanno fiducia nella matematica per ottenere un'azione uguale....

Egli esplorò tutte gli accordi derivati da *frazioni epimore* o *superparticolari*, cioè frazioni che, ridotte ai minimi termini, sono della forma $(n+1)/n$ e fu il primo che classificò ed esplorò i risvolti musicali delle medie proporzionali

Medie proporzionali

Secondo Archita ci sono tre tipi di progressioni e di medie proporzionali. Egli diede le seguenti:

Definizioni: tre numeri a,b,c sono in progressione aritmetica /geometrica/armonica in questi casi

Progressione aritmetica se $b-a=c-b$ $b=(a+c)/2$

Progressione geometrica se $b/a=c/b$ $b=\sqrt{ac}$

Progressione armonica se $(b-a)/a=(c-b)/c$

In ognuno dei casi, si dice che b è il medio tra a e c

(nei tre diversi tipi di media).

Provare: tre numeri sono in progressione aritmetica se e solo se i loro reciproci sono in progressione armonica

Musica e medie proporzionali

Archita provò che le frazioni superparticolari non potevano avere medie geometriche che fossero razionali. Invece, partendo dai rapporti superparticolari degli intervalli consonanti e cercandone i medi aritmetici o armonici, generò gli altri intervalli. Fu precursore di Zerlino e del temperamento naturale.

Esempi

Intervallo di partenza	[a,c]	medio cercato	equazione	soluzione trovata	Intervallo risultante	nota
Ottava	[DO4,DO5]=[1,2]	arit.	b-1=2-b	$b_t=3/2$	quinta	SOL4
Ottava	[DO4,DO5]=[1,2]	arm.	(b-1)/1=(2-b)/2	$b_m=4/3$	quarta	FA4
Quinta	[DO4,SOL4]=[1,3/2]	arit.	b-1=3/2-b	$b_t=5/4$	terza mag.	MI4
Quinta	[DO4,SOL4]=[1,3/2]	arm.	(b-1)/1=(3/2-b)/(3/2)	$b_m=6/5$	terza min.	MIb4
Terza	[DO4,MI4]=[1,5/4]	arit.	b-1=5/4-b	$b_t=9/8$	seconda mag.	RE4
Terza	[DO4,MI4]=[1,5/4]	arm.	(b-1)/1=(5/4-b)/(5/4)	$b_m=10/9$	seconda min.	REb4

Provare**:** partendo da un intervallo [1,(m+1)/m], b_t e b_m sono sempre superparticolari

Aristosseno

Aristosseno da Taranto (354-300 a.C.), discepolo di Aristotele, nei suoi *Elementa Harmonica* fu il primo a dare una sistemazione ordinata alle teorie musicali fino ad allora note.

Egli respinse la tradizione pitagorica e la rappresentazione degli intervalli musicali con numeri rigorosamente razionali; trattò gli intervalli come un continuum divisibile all'infinito.

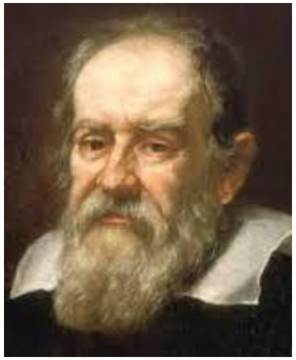
Scelse di partire da quanto l'orecchio percepisce, cioè un continuum di suoni; pose come unità di misura il *tono* che poteva essere suddiviso in *semitono* (1/2 tono) in *diesis cromatica* (1/3 di tono) e in *diesis enarmonica* (1/4 di tono).

Dopo aver enunciato alcuni postulati, cercò di dimostrare la compatibilità o l'incompatibilità di diverse successioni melodiche di note, dando forma geometrica alle sue dimostrazioni e utilizzando molto il ragionamento per assurdo.

Trattò lo studio delle tonalità: il suo sistema di 13 tonalità corrisponde esattamente a quello che J.S. Bach utilizzò nel *Clavicembalo ben Temperato*

Temperamento

come discretizzare una quantità fisica continua



Temperamento=aggiustamento di alcuni intervalli tra alcune note per accordare gli strumenti musicali. Per estensione, sono anche le scale musicali che derivano dai diversi modi di temperamento.

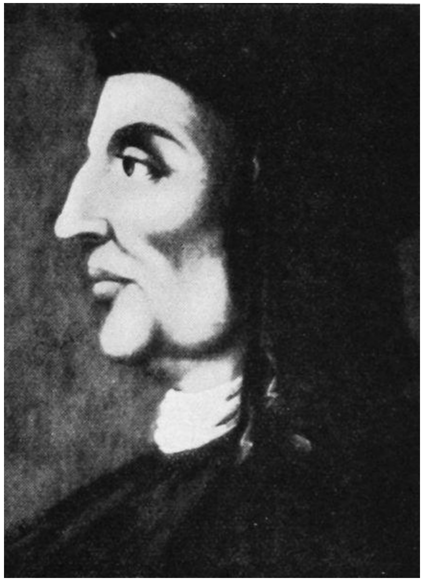
Pitagora Temperamento pitagorico

La scuola di Atene (Raffaello)

Simon Stevin
(Aristosseno)
Temperamento equabile

Temperamento inequabile

Werckmeister
Bach (Buon Temp.)



Zarlino
Vincenzo Galilei
(Archita)
Temperamento naturale

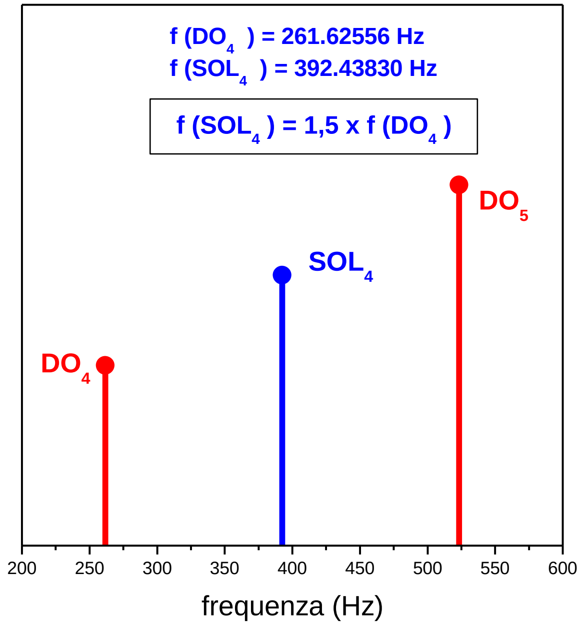
SCALA PITAGORICA
(temperamento pitagorico)

Secondo Pitagora si ottenevano i suoni più gradevoli all'orecchio:

- facendo suonare contemporaneamente una corda di data lunghezza L (suono di frequenza f) ed una di lunghezza pari a ½ L (suono di frequenza 2f) : intervallo di OTTAVA (Es: DO4-DO5)
- facendo suonare contemporaneamente una corda di lunghezza L (suono di frequenza f) ed una di lunghezza pari a 2/3 L (suono di frequenza 3/2f)

Così si definisce il SOL4 (intervallo di quinta):

f(SOL4)=3/2 f(DO4)



Costruire tutta la scala

Partendo dalle sole divisioni per 2 (ottava) e per 3 (la quinta), Pitagora pensò di generare tutti i suoni della scala, nel seguente modo:

- Si prende la *quinta* del SOL4 : 3/2 f(SOL4): è esterna all'ottava DO4-DO5 perché la sua frequenza vale 9/4 volte quella del DO4 iniziale; quindi la si abbassa di un'ottava e **si definisce il RE4**:

f(RE4) = ½ 3/2 f(SOL4) = ½ 3/2 3/2 f(DO4)

f(RE4) = 9/8 f(DO4) $=3^2/ 2^3$ f(DO4)

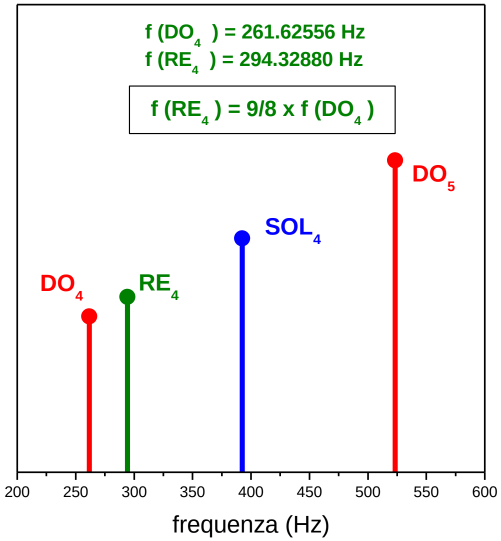
- Si prende la *quinta* del RE4 : 3/2 f(RE4):

è interna all'ottava DO4-DO5 (la frequenza vale 3/2 9/8 f(DO4)= 27/16 f(DO4)<2 f(DO4); quindi questo **definisce il LA4:**

f(LA4) = 3/2 f(RE4) = 3/2 9/8 f(DO4)

f(LA4) = 27/16 f(DO4) $=3^3/ 2^4$ f(DO4)

… e così via.



L'ottava pitagorica

Procedendo in questo modo, si generano tutti i suoni della scala pitagorica

Nota	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
Rapporto con la nota prec.		9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243
Rapporto con la fondam.	1 / 1	9 / 8	81/64	4 / 3	3 / 2	27/16	243/128	2 / 1

I rapporti di frequenza tra suoni consecutivi sono **solo due**: il rapporto 9/8 (**tono**) e il rapporto 256/243 (**semitono**).

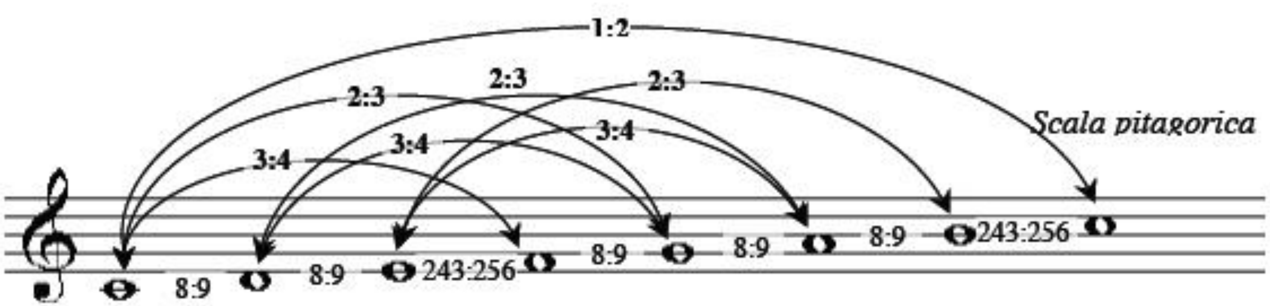
Il fatto che i rapporti in frequenza tra le possibili coppie di note nell'ottava siano **rigorosamente** dei numeri razionali rendeva felice Pitagora (e la sua concezione filosofica di un universo armonico) (e anche D'Alembert, che studiando i suoni aveva scoperto che le armoniche hanno sempre rapporti semplici di frequenze tra loro)

MA....

Limiti della scala pitagorica

- Gli intervalli risultanti si scontrano con l'esigenza di dividere l'ottava in parti uguali, per evitare di dover modificare l'intonazione delle singole note al cambiare della nota di partenza - ossia al cambiare della tonalità.

- I rapporti di *terza* e *sesta* (MI-DO: 81/64) e (LA-DO: 27/16) utilizzano numeratori e denominatori elevati, e danno luogo ad accordi poco consonanti quando sono utilizzati assieme ad altre note della scala. Un analogo problema si pone per l’intervallo di *settima* (SI-DO: 243/128).



Il circolo delle quinte pitagorico: non si chiude

Pitagora pensava che continuando a procedere per quinte, partendo da un DO si sarebbe raggiunto a un certo punto un altro DO; questo è **impossibile** perché ad ogni quinta successiva si ottiene una nota che ha frequenza del tipo $3^r/2^s$ f(DO4) e il rapporto $3^r/2^s$ non potrà mai dare un numero intero, come dovrebbe essere se si arrivasse a un altro DO, che ha una frequenza del tipo n f(DO4); ecco il suo **‘circolo delle quinte’:**

DO4 - SOL4 - RE5 – LA5 – MI6 – SI6 - FA 7 - DO 8 - SOL 8 - RE 9 - LA 9 - FA10 - SI 10

Dopo 12 salti di quinta, si arriva a SI 10.

Con il nostro attuale temperamento SI 10=DO11, ma non era così ai tempi di Pitagora perché la frequenza di DO11 è 2^7 volte f(DO4), mentre la frequenza di SI 10 è $(3/2)^{12}$ volte f(DO4), e $(3/2)^{12} \neq 2^7$.

Il rapporto $(3/2)^{12} / 2^7 \cong 1{,}01364$ è il **comma pitagorico.**

Anche andando per quarte, ci sarebbe lo stesso problema, perché $(4/3)^s \neq 2^r$ (l’equazione $3^x = 2^y$ non ha soluzioni x,y intere - sarebbe in contraddizione con il teorema fondamentale dell’aritmetica).

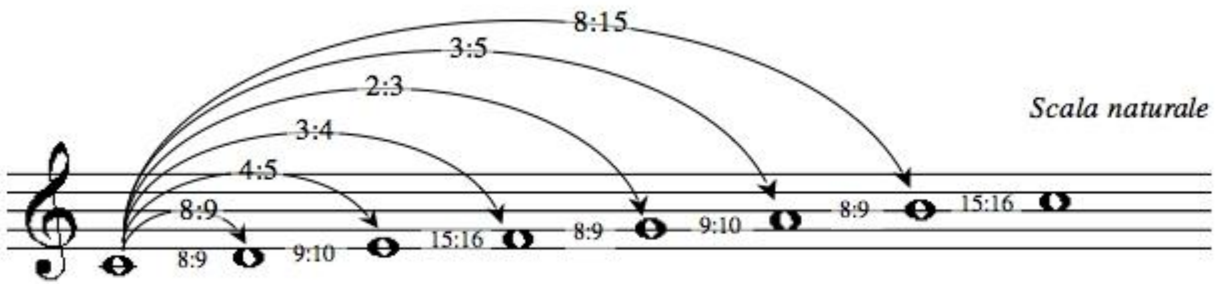
SCALA NATURALE
(temperamento naturale)

L’anomalia della scala pitagorica che i rapporti di *terza* e *sesta* (MI-DO e LA-DO) danno luogo ad accordi poco consonanti quando sono utilizzati assieme ad altre note della scala non dava problemi finché la musica era monodica (canto gregoriano, linea orizzontale, fino al 13 secolo); con il 15 secolo e l’affermarsi del canto madrigalistico si sviluppò la polifonia, e i limiti degli accordi dissonanti vennero a galla… venivano spesso aggiustati ‘a mano’, ad esempio abbassando la terza crescente 81/64 e portando il rapporto MI-DO a 5/4.

Gioseffo Zarlino (1517-1590) propose il suo **temperamento naturale**

Corresse il rapporto DO-MI a 4/5 e di lì ricominciò con il ciclo delle quinte

(Il suo allievo Vincenzo Galilei (1520,1591) propose alcuni aggiustamenti)



Questi sono i rapporti di frequenza tra suoni consecutivi della scala naturale:

Nota	**DO**	**RE**	**MI**	**FA**	**SOL**	**LA**	**SI**	**DO**
Rapporto con la nota prec.		**9/8**	**10/9**	**16/15**	**9/8**	**10/9**	**9/8**	**16/15**
Rapporto con la fondam.	**1 / 1**	**9 / 8**	**5 / 4**	**4 / 3**	**3 / 2**	**5 / 3**	**15 / 8**	**2 / 1**

I rapporti di frequenza tra suoni consecutivi sono adesso **tre**:

Semitono “s”	**16 / 15**	**1.066667**
Tono minore “t”	**10 / 9**	**1.111111**
Tono maggiore “T”	**9 / 8**	**1.125**

Nota	**DO**	**RE**	**MI**	**FA**	**SOL**	**LA**	**SI**	**DO**
Rapporto	**1 / 1**	**9 / 8**	**5 / 4**	**4 / 3**	**3 / 2**	**5 / 3**	**15 / 8**	**2 / 1**
Intervallo		**T**	**t**	**s**	**T**	**t**	**T**	**s**

E’ così possibile dividere l’ottava in dodici intervalli **disuguali**, sempre usando rapporti di numeri interi.

Vantaggi e limiti della scala naturale

Vantaggi rispetto alla scala pitagorica:
- Le note sono ricondotte a frazioni più semplici.
- Si ottiene un'ottima consonanza della sesta (DO-LA) e migliora il rapporto con la settima (DO-SI).

Svantaggi:
- Si perde l’omogeneità negli intervalli: compaiono **tre** rapporti: 9/8 (*tono maggiore*), 10/9 (*tono minore*) e 16/15 (*semitono*).
- Si perde la semplicità di fondo: ad esempio, in questo sistema, l'intervallo RE-LA (una quinta) non vale più 3/2, ma 40/27 (detto *intervallo di quinta stretta* perché 40/27 < 3/2).

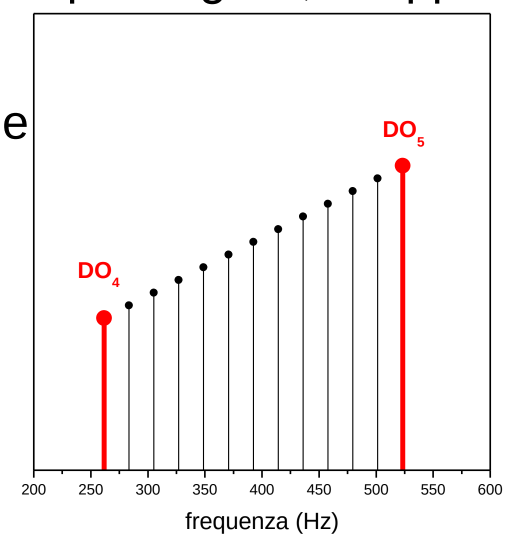
Il prezzo pagato per realizzare una maggior consonanza tra le note è l’introduzione di **irregolarità nella successione degli intervalli**: di conseguenza, la scala naturale è **meno adatta** per l'accordatura degli strumenti ad intonazione fissa (mentre è quella più vicina alle esigenze degli strumenti ad intonazione variabile).

Temperamento equabile
(scala temperata)

Il punto di vista di Zarlino e Galilei fu contestato dal matematico e ingegnere fiammingo **Simon Stevin** (1548-1620), che in un'opera scritta intorno al 1600 descrisse una scala basata sulla divisione dell'ottava in dodici semitoni uguali. Gli intervalli di tono e semitono propri della scala di Stevino sono identici a quelli indicati già da Aristosseno nel 320 a.C.

In tal modo l'intervallo di ottava (rapporto 2:1) è diviso in 12 parti uguali; il rapporto tra due note consecuive sarà $\sqrt[12]{2}$: infatti $(\sqrt[12]{2})^{12} = 2$

Problema: dividendo un qualunque intervallo di frequenze in parti uguali linearmente, la larghezza di ciascun sottointervallo così definito dipenderebbe dalla posizione dell'ottava (ossia dalla frequenza f(DO4)).



Logaritmi

Per eliminare questo inconveniente la soluzione è quella di ricorrere ad una ***scala logaritmica***.

Prendiamo il logaritmo in base 2, il rapporto tra le frequenze di suoni a distanza di

ottava diventa lineare (non più esponenziale)

$\log_2 2=1$, $\log_2 4=2$, $\log_2 8=3$,….: si passa da 2^n ad n

Si prende (anziché il rapporto delle frequenze) la differenza tra il logaritmo delle frequenze e si divide questo intervallo in 12 parti uguali.

In questo modo si origina il **temperamento equabile**.

Ora passiamo nuovamente alle frequenze applicando la relazione inversa: $2^{\log_2 (f)} = f$ ottenendo intervalli che non sono non più uniformi (su scala lineare) all'interno dell'ottava, ma questa partizione sarà **identica** in ottave differenti.

Le frequenze dei 12 intervalli corrispondono ai dodici ***semitoni*** dell'ottava.

Al LA4 si attribuisce a frequenza di 440 Hz esatti (nel temperamento equabile).

Musica e Logaritmi

L'uso dei logaritmi in musica è molto adatto per la semplificazione dei calcoli.

Se si ricorda la proprietà che log(ab)=log a+log b , viene naturale il collegamento tra logaritmi e intervalli musicali; come è noto, gli intervalli musicali si 'sommano' moltiplicando i rispettivi rapporti (ad esempio, un intervallo di ottava è 'somma' una quinta e una quarta, e, moltiplicando i rispettivi rapporti si trova proprio 3/2x4/3=2).

Inoltre la suddivisione dell'ottava in semitoni uguali comporta la semplice divisione per 12 del corrispondente valore logaritmico, anziché l'estrazione di una radice dodicesima.

La base logaritmica più naturale in musica, pensando alla scala pitagorica è la base 2; con questa base, se si calcola il logaritmo del rapporto tra due note di un intervallo, la caratteristica dà il numero di ottave comprese in tale intervallo mentre la mantissa dà il rapporto tra le due note riportate nella stessa ottava.

Ad esempio,il rapporto dell'intervallo DO1-SOL1 è 3/2 e $\log_2 3/2=0{,}585$; invece l'intervallo DO1-SOL3 ha rapporto 6 e $\log_2 6=2{,}585$

Temperamento Werckmeister

o inequabile

Andreas Werckmeister (1645-1706) definì in un trattato del 1691 diversi tipi alternativi di temperamento (era già stato descritto da Mersenne mezzo secolo prima). La sua opera teorica influenzò, fra gli altri, J.S. Bach che adottò uno dei temperamenti proposti da Werckmeister nella celebre raccolta *Il Clavicembalo ben temperato.* Il sistema di Werkmeister, propone una scala con cinque quinte equabili e sette quinte pitagoriche, chiudendo quasi perfettamente il ciclo delle quinte e pertanto elimina la "quinta del lupo“ SOL -MIb, permettendo di suonare in tutte le tonalità.

Di questo sistema furono introdotte numerose varianti, note in area tedesca come *buoni temperamenti* e oggi spesso chiamate *temperamenti inequabili*.

W. sostanzialmente prende il comma pitagorico (dovuto alla differenza tra SI e DO), lo divide in 12 parti e ripartisce questa quantità tra tutte le note.

La differenza di posizione in frequenza dei dodici suoni nell’ottava fra temperamento Werckmeister (del IV tipo) e temperamento equabile è molto piccola, ed è intermedio tra quello naturale e quello equabile.

Confrontiamo i semitoni W-IV. vale 208/196, quello equabile $\sqrt[12]{2}$: ≅ 18/17, il semitono del T. naturale è 16/15, quello pitagorico è 256/243, mentre il semitono cromatico è 25/24

- 25/24 < 256/243 < 18/17 < 208/196 < 16/15
- S. CR < S. PIT. < S. EQUAB. < S. WERC.-IV < S. NAT.

Mersenne

Marin Mersenne (1588-1648) studia la musica non solo come arte dei suoni, ma come acustica, partendo da esperienze sulle corde vibranti.

Nel *Traité des instruments à chordes* propone la divisione dell'ottava in 12 semitoni uguali, cioè il *temperamento dodecatonico equalizzato* cui arriverà mezzo secolo dopo Werckmeister. Vuole inserire 11 medi geometrici tra due Do consecutivi (posti convenzionalmente pari a 100000 e 200000), cioè trovare $n_1, n_2, \ldots, n_{11}$ per cui sia geometrica la progressione

$$100000,\ n_1, n_2, \ldots, n_{11},\ 200000$$

La ragione della progressione risulta uguale a $\sqrt[12]{2}$

Questo calcolo Mersenne lo semplifica utilizzando i logaritmi, da poco scoperti.

Keplero

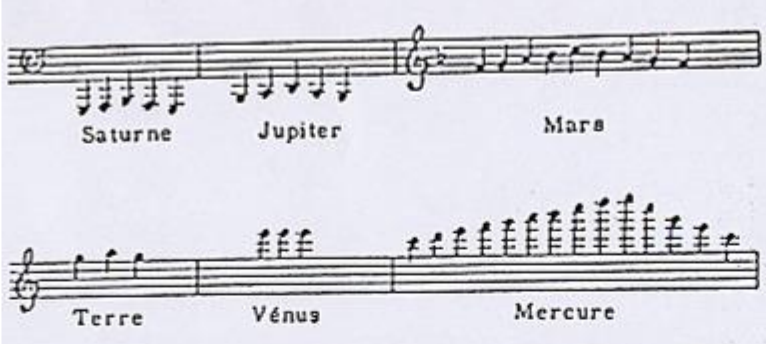
Johannes Kepler (1571-1630) fu un grande astronomo e un importante teorico della musica. Il suo universo eliocentrico è ordinato in orbite ellittiche rette da precise leggi matematiche.

Nell' *Harmonices mundi* tenta di estendere le proporzioni armoniche musicali a tutti gli elementi del cosmo.

Deduce dalle velocità angolari dei pianeti le scale corrispondenti ai generi musicali dell'epoca; dai rapporti tra le velocità angolari dei pianeti in afelio e perielio deduce i rapporti degli intervalli musicali (ad esempio, Marte/Terra=2/3, cioè l'intervallo di quinta).

Di qui ricava la '*musica dei pianeti*'

planètes	*aphélie* (A) *périhélie* (P)	*harmonies propres à chaque planète*	*harmonies entre deux planètes* — *convergence*	*harmonies entre deux planètes* — *divergence*
Saturne	A : a P : b	$\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ (tierce majeure)		
			$\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$ (octave)	$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}$ (octave + quinte)
Jupiter	A : c P : d	$\frac{c}{d} = \frac{5}{6}$ (tierce mineure)		
			$\frac{d}{e} = \frac{5}{24}$ (2 octaves + tierce mineure)	$\frac{c}{f} = \frac{1}{8}$ (triple octave)
Mars	A : e P : f	$\frac{e}{f} = \frac{2}{3}$ (quinte)		
			$\frac{f}{g} = \frac{2}{3}$ (quinte)	$\frac{e}{h} = \frac{5}{12}$ (octave + tierce mineure)
Terre	A : g P : h	$\frac{g}{h} = \frac{15}{16}$ (demi-ton diatonique)		
			$\frac{h}{i} = \frac{5}{8}$ (sixte mineure)	$\frac{g}{j} = \frac{3}{5}$ (sixte majeure)
Vénus	A : i P : j	$\frac{i}{j} = \frac{24}{25}$ (demi-ton chromatique)		
			$\frac{j}{k} = \frac{3}{5}$ (sixte majeure)	$\frac{i}{l} = \frac{1}{4}$ (2 octaves)
Mercure	A : k P : l	$\frac{k}{l} = \frac{5}{12}$ (octave + tierce mineure)		



L'harmonie du monde selon Kepler. Notation moderne de J.L.E. Dreyer, *History of the Planetary Systems from Thales to Kepler*, Londres, Cambridge University Press, 1906, p. 408.

Cartesio e Beeckam

Cartesio (1596-1650) nel 1618 pubblicò il ***Compendium Musicae*** , dedicato all'amico scienziato olandese Isaac Beeckam.

Intento del *Compendium* :

- mostrare l'influenza della musica sull'animo umano
- spiegare il meccanismo acustico e fisiologico per cui la musica produce i suoi effetti sui sensi.

Punto di partenza: concezione meccanicistica del suono e della consonanza; da un segmento e dalla suddivisione in parti di esso Cartesio conclude che solo alcuni numeri sono sonori (il 2, 3 e 5), mentre altri sono dedotti dai primi e quindi sonori in seconda istanza, cioè accidentalmente.

Matrice matematica nell'approccio allo studio della musica : costante tentativo di ridurre tutto a valori quantificabili (vd. *Discours sur la méthode:* idea di un metodo universale basato sui principi matematici applicabile a diversi ambiti umani).

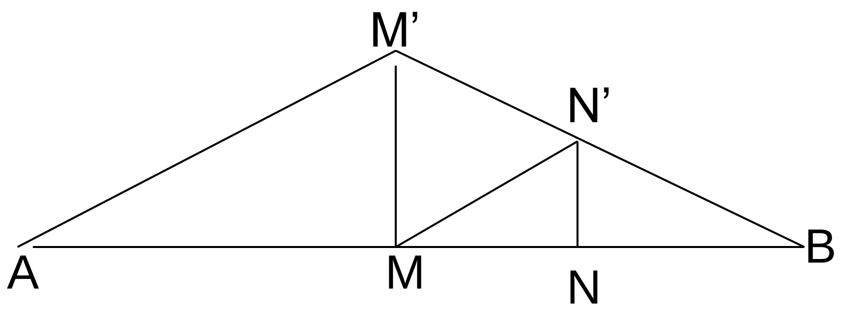
- Analisi del dato sonoro (ridotto in termini quantitativi: riconosciuto e vagliato per variazioni dell'altezza e della durata)
- Sua scomposizione se eventualmente troppo complesso e poco chiaro
- Formulazione di un risultato poi direzionato verso 'l'anima' (ad ogni tipo di intervallo corrisponde un certo effetto sui sensi e quindi sull'animo)

Lunghezza della corda e frequenza

Cartesio si attribuisce l'importante scoperta che la lunghezza della corda è inversamente proporzionale alla frequenza.

In realtà Beeckman lo aveva provato in una lettera del 1614 a Mersenne (che la pubblicò nel 1636). Riportiamo qui la sua ingegnosa dimostrazione.

Si consideri la corda AB, se ne prenda il punto medio M, e poi si segni ancora il punto medio N del segmento MB. Si pizzichi ora la corda in M, trascinandolo fino ad M' e poi la si lasci libera di vibrare. Il punto N sara' sollevato fino ad N', e, data la similitudine dei triangoli MM'B e NN'B, si avrà MM'=2NN'. Consideriamo ora la corda MB e lo spostamento di N in N' . Data la similitudine dei triangoli AM'B e MN'B, i punti corrispondenti della corda AB (nel triangolo AM'B) e della corda MB (nel triangolo MN'B) durate le oscillazioni si muovono tutti alla stessa velocità e lo spazio che N' percorre è la metà di quello percorso da M'; ciò significa che N' passerà per il punto N due volte nello stesso tempo in cui M' passa per M, cioè la frequenza di N è doppia di quella di M.



Eulero

Leonard Euler (1707-1783) nel suo *Tentamen novae theriae musicae* vuole rispondere a queste domande:

- Perché alcuni suoni sono piacevoli e altri no?
- Come trovare regole fisse, considerando la soggettività del giudizio sulla piacevolezza dei suoni?
- Come racchiudere un’arte come la musica entro regole fisse?

Fu definita da suo assistente Nikolaus Fuss (nel suo *Elogio di Eulero* del 1783)

Un'opera profonda, piena di nuove idee presentate da un punto di vista originale; ciononostante non ha goduto di grande popolarità, poiché contiene troppa matematica per i musicisti, e troppa musica per i matematici

Suavitatis gradus

La chiave della teoria sta nel concetto di ordine (che dipende dall'altezza e dalla durata dei suoni) e di *suavitatis gradus* ; questo è legato agli esponenti della decomposizione in fattori primi irriducibili dei m.c.m. tra i denominatori dei rapporti corrispondenti ai vari intervalli. Egli costruisce una *Tabella di soavità* corrispondente a tali m.c.m.; i numeri romani sono i gradi di soavità (in ordine decrescente)

I	1 rapporto [1:1]	[primum suavitatis gradum].
II	2 rapporto [1:2]	
III	3 4	
IV	6 8	
V	5 9 12 16	
VI	10 18 24 32	
VII	7 15 20 27 36 48 64	

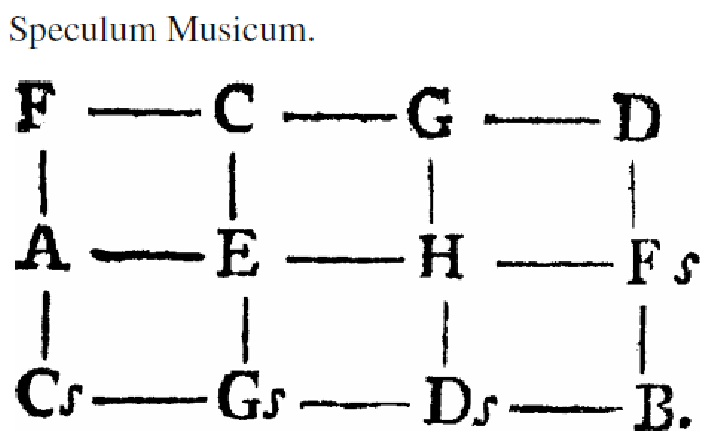
etc.

Se [1:p] ha grado (m primo), $[1:2^n]$ ha grado m+1; $[1: p^k]$ ha grado m+ k/2;… $[1: p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}]$ ha grado $m+\Sigma_{i=1}^{n} (k_i /2)$

'si ratio 1:p ad gradum, cuius index sit m, referatur, rationem 1:p^2 ad gradum m + 1 pertinere, 1:p^4 ad gradum m + 2 et 1:p^{2n} ad gradum m + n. Multiplicato enim numero p per 2 ad rationis perceptionem requiritur praeter perceptionem rationis 1:p bisectio aut duplicatio, qua ut simplicissima operatione gradus suavitatis unitate evehitur'

Lo Speculum

De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis (1774). In questa opera scopo di Eulero è di risolvere i problemi matematici posti dal temperamento, in particolare, il problema dell'*enarmonia* (rapporto tra due suoni di notazione diversa ma di identica altezza, ad es. DOs e REb) , cioè come tornare sulla stessa nota dopo il ciclo delle 12 quinte, o anche dopo quello delle 3 terze maggiori e delle 4 terze minori.
Lo speculum descritto da Eulero è una matrice 3x4 di note disposte per quinte sulle righe e per terze maggiori sulle colonne: questo è lo Speculum con FA in posizione (1,1)



Lo Speculum di Eulero fu il precursore di molti altri 'reticoli armonici', finiti o infiniti, tra cui il Tonnetz di Hugo Riemann del 1880.

Bach

L’ *esprit de géometrie* (Cartesio, Pascal, contrapposto all’ *esprit de finesse*) è componente fondamentale dell’arte di Johann Sebastian Bach (1685-1750).

‘Non esistono amore o bellezza degne di questo nome senza legge e senza ordine’

Suono = entità ideale, matematica, indipendente dalla sua esistenza sensibile per mezzo di voci o strumenti

Composizione musicale = costruzione razionale, rispondente a precisa struttura logico matematica ; aritmetica e geometria ne sono elementi costitutivi essenziali, insieme con i principi di simmetria .

Si trovano proporzioni, sezioni auree e teoremi anche in diversi brani organistici, clavicembalistici e vocali; dietro a ogni melodia sussiste una complessa impalcatura di precisi rapporti matematici.

Opere teorico-pratiche fondamentali:

***Offerta Musicale, Arte della Fuga, Clavicembalo Ben Temperato*.**

I : domina il Canone (= regola, legge), che classifica e esemplifica

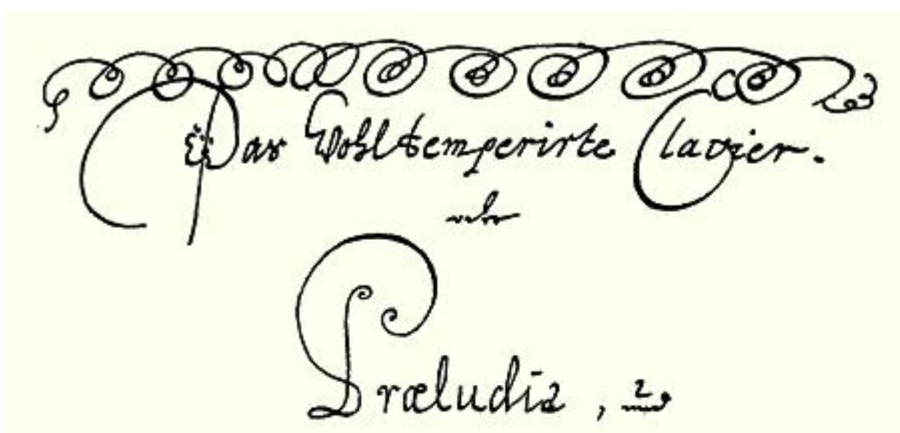
II : analizza tutte le possibili scritture della Fuga (composizione simile al canone, ma con più libertà di composizione emotiva ed artistica)

III : in due Libri, ciascun contiene 24 coppie di brani, un preludio e una fuga nella stessa tonalità. Voleva provare i sistema di temperamenti (?)(forse quello equabile, o quello di W.?, oforse il SUO?)

Bach definiva *buon temperamento* qualsiasi sistema di accordatura che permettesse di suonare in tutte le tonalità

Il frontespizio di ‘Das Wohltemperierte Clavier’

Un apparente fronzolo ornamentale,
in verità è l’acrostico che permette
di svelare il geniale e stupefacente
sistema d’accordatura, che Bach
ha codificato nell’esperienza della
sua attività musicale giovanile.
Offre una lettura molto precisa,
attraverso particolari grafici inequivocabili,
della straordinaria sintesi tra antichità,
medioevo, rinascimento ed età barocca
che Bach ha realizzato con il suo innovativo
sistema d’accordatura.



La Società per le Scienze Musicali

Nel 1738 Lorenz Mizler, allievo di Bach, a Lipsia fondò una società semisegreta, la *Società per le Scienze Musicali*, con l'intento di mostrare i legami della matematica con la musica. Mizler affermava che

la musica è il suono della matematica.

Scopo: riportare la musica alla sua origine pitagorica.

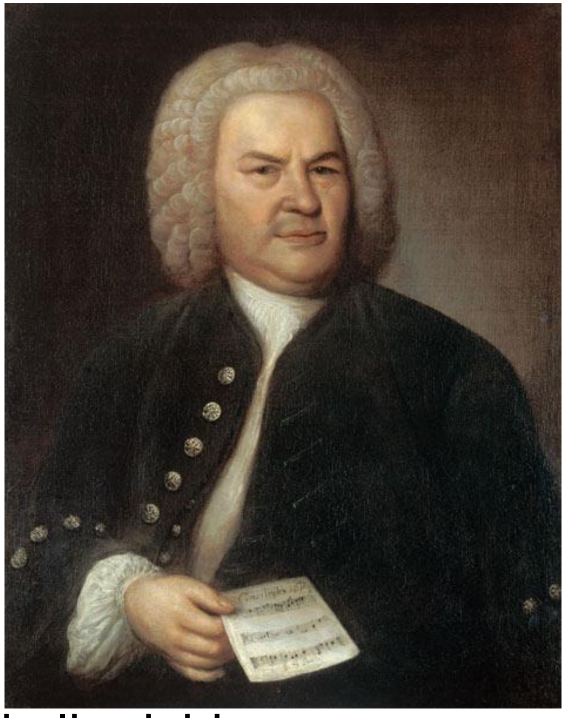
Simbolo: cerchio (simbolo di perfezione) + triangolo (simbolo della Trinità) circondati da api (simbolo del lavoro).

Lo Statuto prescriveva che i membri della Società lavorassero come le api allo scopo di riportare la musica alle sue origini matematiche.

Nel cerchio i numeri : 1,2,3,4,5,6 , il *senario di Zarlino*, simbolo dell'ordine matematico-musicale, i primi rapporti armonici. (2:1=ottava; 3:2 quinta, 4:3 quarta, 5:4 terza maggiore, 6:5 terza minore).

Per l'ammissione: produrre una composizione musicale di natura matematica (ogni anno), e presentare un ritratto.

Bach e la Società per le Scienze Musicali



Nel 1747 Johann Sebastian Bach, attese a far domanda di iscrizione nella *Società per le Scienze Musicali* per essere certo di entrare come 14 membro; consegnò il ritratto ad olio richiesto (realizzato da Elias Gottlob Haussmann, che lo raffigura con lo spartito di un *Canone triplo a sei voci* in mano e in cui veste una giacca con 14 bottoni) e presentò per l'ammissione le Variazioni canoniche sul tema *Vom Himmel Hoch da komm ich er.*

Si osservi che in 1747 il numero 14 compare due volte.

Nel 1748 presentò l' *Offerta musicale*.

Nel 1749 avrebbe voluto presentare l' *Arte della fuga*, che non riuscì a terminare per le sue condizioni di salute.

L’Arte della Fuga

L'arte della fuga (*Die Kunst der Fuge*), è un'opera incompiuta di Bach, la cui composizione iniziò probabilmente intorno al 1740. Fu pubblicata postuma nel 1751. E’ una raccolta di sperimentazioni puramente virtuali sul contrappunto composta da 14 Fughe e 4 Canoni. Alcune delle fughe contenute sono tra le più complesse mai composte; l'opera viene ritenuta uno dei vertici più alti toccati dalle composizioni musicali.

E’ scritta su una partitura che non contiene indicazioni sugli strumenti da utilizzare.

Si pensa che l'Arte della fuga fosse scritta per visualizzare I principi filosofici pitagorici. Bach era amico del filosofo pitagorico Johann Gesner prima a Weimar e poi a Lipsia (dove Bach era Cantore). Sicuramente si nota poi l'influenza di Eulero, che Bach conobbe presso la corte di Federico II a Postdam. Anche Mizler, fondatore della *Società per le Scienze Musicali*, allievo e amico di Bach, era studente di Gesner.

L’Arte della Fuga è articolata secondo i rapporti numerici e filosofici pitagorici di *unità* (con l'adozione di una tonalità uniforme), *tetraktys* (il rapporto di 1,2,3 e 4, disposti a formare il triangolo perfetto), il principio speculare del *Contrapunctus* (nome mutuato da una terminologia aristotelica sul bilanciamento degli opposti) e *musica delle sfere* (forse riprodotta nelle Fughe 1-7); il vocabolo stesso ‘*fuga*’ potrebbe essere interpretato come 'volo', in riferimento al librarsi delle frasi musicali e all'ascesa dell’animo verso l’Empireo

Ecco il Contrappunto 1-2-3 (archi e fagotto):

https://www.youtube.com/watch?v=7Qq1UWUPCT8

Bach e la ghematria

Ghematria = studio numerologico delle parole, sulla base della coincidenza tra numeri e lettere dell'alfabeto (es. A=1, B=2, etc…), codice trasmesso alla cultura occidentale dalla tradizione ebraica.

La costruzione aritmetico-geometrica delle opere di Bach si intreccia e talvolta si fonde con la simbologia numerologica e cabalistica a cui Bach si affida spesso per glorificare Dio.

Bach ricorre con frequenza a determinate cifre cariche di significato. Il numero 14, e le sue varianti, è uno di questi:

- 14 BACH (2+1+3+8=14)
- 41 J.S. BACH (9+18+2+1+3+8=41)
- 158 JOHANN SEBASTIAN BACH (e anche 1+5+8=14)

  E' la *firma completa* di Bach: alcune sue composizioni sono terminate o autografate alla misura 158.

I numeri in Bach

Alcune cifre importanti della numerologia di Bach, vera alchimia matematica e musicale:

1 : il Dio Unico. Bach scrisse il corale *Wir gläuben all an **einen** Gott* BWV 680 della Messa Luterana su 100 misure (1+0+0 = 1)

bwv680.mid

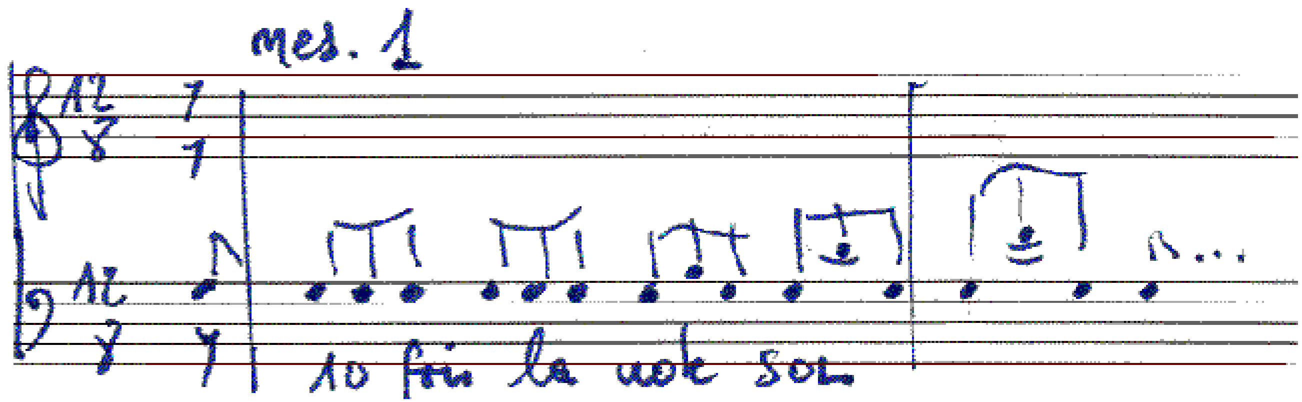
2: la coppia, il rapporto; rappresenta l'immagine del Figlio in rapporto a quella del Padre. Ma è anche *l'effetto specchio*: tema e rovesciamento del tema, come nel corale BWV 668a *Vor deinen Thron tret ich*

vordeinenT[1].not

10 – 14 - 41

10: i 10 Comandamenti. Nel corale BWV 679 *Dies sind die heilgen zehn Gebot*, nella prima misura, il SOL è ripetuto dieci volte

bwv679[1].not

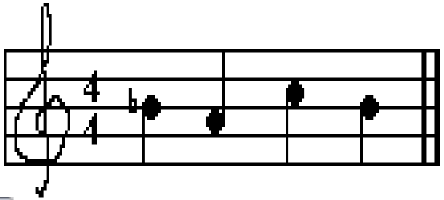


14 e 41 : spesso Bach firmava le sue opere alla misura 14 o alla 41.
Nella fantasia corale sul tema *Vor deinen Thron tret ich (*l'ultima opera che Bach terminò) il tema è di 14 note, l'intera melodia di 41

B-A-C-H

Bach=ruscello; ‘*Nicht Bach, sondern Meer’* (fu il commento di Beethoven)
Le lettere B-A-C-H sono i nomi di note, nella scrittura musicale tedesca
A=La, B=Sib, H=Si, C=Do, D=Re, E=Mi, F=Fa, G=Sol

Ecco il nome B.A-C-H



Ed ecco come suona:

B_A_C_H.not

Bach si ‘firma’ spesso con le note B-A-C-H (o con loro permutazioni, o trasposizioni in altre tonalità), ad es. nel Preludio e Fuga in La min del II Libro del Clavicembalo Ben Temperato BWV 889 (3.53 – 6.03)
http://www.youtube.com/watch?v=fZ0zH9VrTsM&feature=fvst
Franz Liszt (1811-1886) scrisse una sontuosa fuga per organo: la *Fuga sul nome B-A-C-H*. Roberto Marini all’Organo dell’Eglise St. François in Lausanne
http://www.youtube.com/watch?v=hjdjbsWt24w&feature=related
Omar Caputi sull’organo di Santa Rita
http://www.youtube.com/watch?v=mDLBynFSjiQ

Bach nello spazio

Tre composizioni di Bach sono state incluse nel *Voyager Golden Record*, un disco inserito nelle prime due navicelle del *Programma Voyager*, lanciato nello spazio nel 1977 e contenente suoni ed immagini della Terra al fine di portare ad eventuali altre civiltà la conoscenza della nostra cultura.

Il messaggio a bordo dei Voyager è costituito da un disco d'oro contenente il sistema periodico degli elementi e alcune informazioni chiave sul nostro ciclo biologico e sulla posizione del nostro pianeta nel cosmo, una ricca galleria di immagini sulla nostra terra, e la registrazione di un messaggio in 55 lingue e di musiche di tutti i continenti, e altre informazioni scientifiche.
Sul retro del disco (inciso su una facciata) sono disegnate in forma schematica le indicazioni sul contenuto e le istruzioni per estrarre le informazioni.

Bach risulta il compositore maggiormente rappresentato sul disco, sia per numero di brani che per durata complessiva.

Musica di Bach (per alieni?)

I brani inclusi sono:

il Preludio e Fuga n.1, BWV 846 dal primo libro del *Clavicembalo Ben Temperato* (eseguito al pianoforte da da Friedrich Gulda).

http://www.youtube.com/watch?v=0KQW2YnCUrE&feature=related

il primo movimento del *Concerto brandeburghese* n.2 BWV 1047
https://www.youtube.com/watch?v=3HSRIDtwsfM
la *Gavotte en rondeau* della partita n.3 per violino solo BWV 1006
(suonata da Arthur Grumiaux) http://www.youtube.com/watch?v=7dUKYvoqEqA
http://www.youtube.com/watch?v=waxat-_tRH8 (Preludio: suona Nathan Milstein)

Musica dalla Terra nello spazio

Questa è la musica sul disco spedito nello spazio:

Brandenburg Concerto No. 2 in First Movement **J.S**. **Bach** /Karl Richter, Munich Bach Orchestra

Gavotte en Rondeaux from the Partita No. 3 in E Major for Violin **J.S. Bach** / Arthur Grumiaux

The Magic Flute, Queen of the Night aria, No 14 **Mozar**t /Edda Moser, Soprano W. Saivalish, Bavarian State Opera

The Well-Tempered Clavier, Book 2, Prelude and Fugue in C, No. 1 **J.S. Bach** /Glenn Gould, piano

Symphony No 5 in C Minor, First Movement **Beethoven** /Otto Klemperer, Philharmonia Orchestra

String Quartet No. 13 in B flat, Opus 130, Cavatina **Beethoven** /Budapest String Quartet

Rite of Spring, Sacrificial Dance **Stravinsky** /Stravinsky, Columbia Symphony Orchestra

Fairie Round, from Paueans, Galliards, Almains and Other Short Aeirs **Holborne** /D. Munrow, Early Music Consort of London

Tchenhoukoumen Senegal, percussion /Recorded by Charles Duvelle

Morning Star and Devil Bird Australia Aborigine songs /Recorded by Sandra LeBrun Holmes

El Casabel Mexico /Performed by Lorenzo Barcelata and the Mariachi Mexico

Men's House Song Papau New Guinea /Recorded by Robert MacLennan

Tchakrulo Georgian, Chorus /Collected by Radio Moscow

Panpipes and Drum Song Peru /Recorded by Jose Maria Arquedas

Ugam Azerbaijian Bagpipes /Collected by Radio Moscow

Kinds of Flowers,Java, court gamelan /Recorded by Robert Brown

Iziel je Delyo Hagdutin Bulgarian /Sung by Valya Balkanska

Navajo Night Chant United States /Recorded by Willard Rhodes

Pygmy Girls' Initiation Song Zaire /Recorded by Colin Turnbull

Melanesian Panpipes Solomon Islands /Collected by the Solomon Island Broadcasting Service

Wedding Song Peru /Recorded by John Cohen

Cranes in Their Nest Japan, shakuhachi /Performed by Coro Yamaguchi

Flowing Streams China, Ch'in /Performed by Kuan P'ing-hu

Jaat Kahan Ho India, Raga /Sung by Surshri Kesar Bai Kerkar

Dark Was the Night / Written and performed by Blind Willie Johnson

Johnny B. Goode /Written and performed by Chuck Berry

Melancholy Blues / Performed by Louis Armstrong & his Hot Seven

Mozart

Anche Mozart è nello spazio, con la funambolica Aria della Regina della Notte dal *Flauto Magico*: http://www.youtube.com/watch?v=8GHSv8RLGlw

Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) amava i numeri : *Le nozze di Figaro*, inizia con :

Cinque, dieci, venti, trenta, trentasei, quarantatre

E' Figaro, che misura lo spazio per il suo letto nuziale.

Nel *Don Giovanni* Leporello rivela a Donna Elvira il catalogo amoroso del padrone:

In Italia 640, in Almagna 231, 100 in Francia, in Turchia 91, ma in Ispagna son già 1003...

A parte le arie dove si canta contando, le conoscenze di Mozart in campo matematico furono molto profonde: in molti passaggi delle sue opere fa un uso preciso dell'aritmetica abbinata alla musica.

Per esempio, nella scena del ballo del *Don Giovanni*, alla fine del primo atto, Mozart sovrappone tre danze molto diverse sia nello stile che nel ritmo: un minuetto in ¾, una contraddanza in 2/4 ed una allemanda in 3/8. E qui serve una precisione aritmetica non indifferente: nella partitura, ad ogni 2 battute del minuetto ne devono corrispondere 3 della contraddanza e 6 dell'allemanda; la scena è piuttosto difficile da eseguire...

Mozart e l’apprendimento della matematica

Recenti studi proverebbero che l’ascolto di Mozart durante una lezione di matematica ne favorisce l’apprendimento.

Alcuni esperti affermano che la zona del cervello dove si elabora la musica è la stessa che interviene nella percezione spaziale, così che, al momento dell’ascolto, essa risulta maggiormente attivata.

Ma perché Mozart e non altri musicisti? Forse perché la costruzione formale della musica mozartiana è molto simmetrica ed equilibrata, perché nelle sue melodie i temi musicali sono richiamati ad intervalli fissi con un andamento regolare, come una costruzione matematica, dove tutto torna. E tutto in un insieme melodico meraviglioso.

Ed ecco che il nostro cervello riconosce l’ordine della struttura, si tranquillizza e realizza al meglio ciò che gli è richiesto.

Vogliamo provare ascoltando l’Andante del Concerto per pianoforte e orchestra K467. E’ conosciuto anche come tema da *Elvira Madigan*, dal nome della protagonista del film omonimo del 1967 : è un *Andante c*antabile, la cui cantabilità non viene mai offuscata da cambiamenti di ritmo ed il canto è mantenuto a livelli di delicata serenità.
Maurizio Pollini è al piano, Riccardo Muti dirige l’Orchestra della Scala di Milano (al 14’30)

http://www.youtube.com/watch?v=i2uYb6bMKyI

Se volete ascoltare un’altra esecuzione, qui al piano c’e’ Murray Perahia, James Levine dirige la Vienna Plilarmonic Orchestra

http://www.youtube.com/watch?v=O7335XDZQP0&feature=related

Dopo…

Molte opere di Beethoven (1770-1827) sono state analizzate alla ricerca di una forma matematica, data la presenza di pattern.

Potete cercare pattern grafici in questa interessante trascrizione 'grafica' del quarto movimento della Nona Sinfonia di Beethoven, quella dell' '*Inno alla Gioia'*

(al 6'14) http://www.youtube.com/watch?v=ljGMhDSSGFU

Persino un insospettabile romantico come Chopin (1810-1849) apprezzava la costruzione razionale in musica: il pittore Delacroix, suo compagno di passeggiate, racconta come Chopin gli descrivesse la scienza dell'armonia e lo appassionasse alla fuga che egli vedeva come *la logica nella musica.*

Ecco come un geometra 'triangola' il Notturno op.27 n.2 di Chopin:

http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=X1QM6YZC45g#!

Arrivando ai giorni nostri, musicisti come Pierre Boulez (1925) e Philip Glass (1937) sono laureati in matematica.

Si pensi poi alle tecniche seriali sviluppate a partire dall'insegnamento di Schoenberg (1874-1951) , che usavano come nucleo di una composizione una successione delle 12 note senza gerarchia o ripetizione (dodecafonia): concetto sviluppato da Anton Webern (e poi da Nono, Stockhausen, Berio, Ligeti e molti altri).

Xenakis

Xenakis (1922-2001) ha scritto un interessante trattato *Musica formalizzata* (1971). Dalla sua prefazione:

Questo testo rappresenta la raccolta di ricerche intorno alla composizione compiute in diverse direzioni:

lo sforzo di ridurre determinate sensazioni sonore, di comprendere le loro cause logiche, di dominarle, e di usarle per le costruzioni volute;

il tentativo di materializzare movimenti di pensiero attraverso il suono, di testarli all'interno delle composizioni;

la volontà di comprendere meglio le opere del passato, cercando di sottolinearne un'unità più profonda che corrisponde al pensiero scientifico del nostro tempo;

lo sforzo di ***fare arte attraverso un "processo geometrico",*** *ovvero, dando un supporto logico meno incerto dell'impulso del momento, e al tempo stesso più serio, più meritevole della fiera lotta che l'intelligenza umana compie in tutti gli altri domini.*

Tutti questi tentativi devono portare a una sorta di ***astrazione e formalizzazione della composizione musicale***

Qui c'e' la 'partitura grafica' di *Meta HP* (sono curve descritte attraverso l'inviluppo delle tangenti: ricordiamo che Xenakis era un architetto, e che ha lavorato con Le Corbusier)

http://www.youtube.com/watch?v=97ru68oJ9P4&feature=related

E qui l' analisi spettrale *di Metastasis*

http://www.youtube.com/watch?v=n2O8bMlEijg&feature=related