



ALFACCLASS 2016

Prof. Dario Bini

Medie geometriche di matrici e loro applicazioni

Generalmente il matematico produce risultati per puro divertimento e spirito creativo, non curandosi affatto delle applicazioni. Accade però che anche i risultati più astratti diventino a distanza di tempo strumenti fondamentali per risolvere problemi del mondo reale a libera disposizione di chiunque ne abbia bisogno.

In questo incontro vorrei mostrare come un problema proveniente dalle applicazioni reali possa essere efficacemente trattato coinvolgendo strumenti provenienti da settori diversi quali la geometria riemanniana, l'analisi matematica e l'algebra lineare. Esso riguarda il concetto di *media geometrica di matrici*.

Per un insieme di numeri reali è abbastanza naturale, facile e intuitivo definire una media. Questo concetto diventa di particolare utilità quando abbiamo a disposizione diversi valori numerici che rappresentano misure di una grandezza fisica e vogliamo estrarre da questi un unico valore che meglio rappresenti la grandezza stessa. Ecco che in contesti diversi si preferisce usare la media aritmetica, oppure quella geometrica oppure la media armonica. Una proprietà della media geometrica di un insieme di numeri positivi è che *la media dei reciproci coincide col reciproco della media*.

In certe situazioni applicative che si incontrano in diversi settori, dalla fisica alla chimica all'ingegneria, accade che le quantità che dobbiamo mediare non sono semplici numeri reali bensì *matrici quadrate simmetriche e definite positive*. Si presenta l'esigenza di definire il concetto di media geometrica di matrici definite positive.

In questo incontro cerchiamo di dare una definizione di questo concetto e vedremo che il compito non è così semplice come potrebbe sembrare. Faremo alcuni tentativi (con poco successo) e poi vedremo che per trattare adeguatamente il problema dovremo coinvolgere alcuni concetti astratti e un po' di *geometria non euclidea*, in un mondo strano ma utile in cui i triangoli apparentemente non hanno un baricentro perché *le tre mediane non si intersecano ma si scavalcano*. Per due matrici riusciremo a dare una definizione univoca di media geometrica, usando il concetto di *funzione di matrice*. Vedremo però che per un insieme di più di 2 matrici non c'è unicità della media. Tra le infinite medie geometriche disponibili descriveremo quella più utilizzata nelle applicazioni, nota come media di Karcher, che comporta la soluzione di una particolare *equazione matriciale*.

Medie geometriche di matrici: alcuni aspetti computazionali

Nelle applicazioni non basta dare definizioni e dimostrare proprietà qualitative della soluzione di un problema quali esistenza, unicità e regolarità, ma occorre poter calcolare o approssimare in qualche forma la soluzione. Il calcolo poi deve essere efficiente nel senso che il tempo impiegato da un computer per fornire la soluzione deve essere basso in relazione al tipo di applicazione.

In questo secondo incontro ci occupiamo degli aspetti computazionali relativi al calcolo della media geometrica di matrici. Questo include il progetto e l'analisi degli algoritmi e la loro implementazione che è un passo fondamentale nella risoluzione numerica di problemi. Vedremo



**POLITECNICO
DI TORINO**



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO**



FONDAZIONE CRT



come dalle definizioni date di media si possano dedurre metodi per il loro calcolo. In certi casi ci si imbatte in un costo computazionale che cresce esponenzialmente rispetto al numero di matrici, che rende impraticabile l'uso di questi algoritmi. Cercheremo di affrontare il problema progettando algoritmi di risoluzione più efficienti.

Prof. Alberto Conte

Guido Fubini

(Venezia, 19 gennaio 1879 - New York, 6 giugno 1943)

Saranno illustrate la vita e le opere di Guido Fubini, il grande matematico che ha insegnato al Politecnico e all'Università di Torino e al quale è dedicata la caccia al tesoro.

Prof. Nicola Fusco

Il problema isoperimetrico e dintorni: un invito al Calcolo delle Variazioni.

Il problema isoperimetrico è probabilmente il più rappresentativo di quel settore della matematica che va sotto il nome di Calcolo delle Variazioni.

Nel seminario discuteremo questo problema ed altre questioni più o meno classiche ad esso collegate in una veloce panoramica che ci porterà dal problema di Didone fino alla ricerca matematica dei nostri giorni.

Prof.ssa Marina Marchisio – Dott. Alessandro Bogino – Dott. Michele Fioravera

**Laboratori di Matematica 1 e 2: il ruolo di un ambiente di Calcolo Evoluto e Problem Solving
con un ACE**

Nella costruzione di un modello matematico che risolva un problema disporre di un ACE, Ambiente di Calcolo Evoluto, ossia un sistema che è in grado di fare il calcolo simbolico, il calcolo numerico e la visualizzazione geometrica 2 e 3-dimensionale, significa potersi concentrare maggiormente sulla strategia risolutiva da adottare, poter simulare le soluzioni trovate e poter valutare meglio quale sia la più adatta. Durante i due laboratori di matematica verranno illustrate, attraverso la risoluzione di problemi, le principali potenzialità dell'ACE Maple, uno dei più diffusi nell'ambiente universitario, sia per lo svolgimento dell'attività didattica, sia per la ricerca. In questo modo si acquisiranno competenze su uno strumento utile sia per il proseguimento della carriera universitaria sia per quella professionale.

Prof. Alberto Marcone

Ordini parziali buoni (e utili)

Un buon quasi-ordine (wqo, dall'inglese well-quasi-order) è un ordine parziale ben fondato e senza antichate infinite. Questa classe di ordini parziali ammette numerose caratterizzazioni equivalenti, che ne testimoniano la rilevanza. Oltre a discutere queste equivalenze, presenteremo alcuni dei risultati più importanti della teoria dei wqo. Mostreremo anche l'utilità dei wqo per esempio per dimostrare la terminazione di programmi.

Prof.ssa Rita Pardini

Cubiche piane

Richiamerò la costruzione della retta proiettiva e del piano proiettivo, introducendo il birapporto e l'invariante modulare di una quaterna di punti sulla retta proiettiva. Poi passerò a considerare



**POLITECNICO
DI TORINO**



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO**



FONDAZIONE CRT



le cubiche lisce del piano proiettivo complesso, scrivendone l'equazione di Weierstrass e descrivendo la configurazione dei flessi. Infine mostrerò come l'invariante modulare di una quaterna di punti possa essere usato per definire un invariante modulare per le cubiche piane. Se il tempo lo consente, accennerò alla legge di gruppo sulla cubica e all'interpretazione dei flessi e dell'invariante modulare in termini di tale legge.

Prof. Lucio Russo

La relatività del moto da Euclide ad Einstein

Il percorso tortuoso e accidentato della storia della scienza è illustrato con l'esempio delle complesse vicende del principio di relatività. Affacciandosi all'epoca della prima attribuzione di moti alla Terra ed enunciato parzialmente da Euclide, respinto da Tolomeo e ripreso in forma più completa da Giordano Bruno prima che da Galileo, tale principio fu inutilmente rifiutato da Newton. Divenuto poi incompatibile con l'ottica e l'elettromagnetismo classici, fu infine recuperato da Einstein nell'ambito della sua nuova teoria.

Prof. Simon Salamon

I camini e le coniche di Londra

La Battersea Power Station a Londra è nota per i suoi quattro immensi camini bianchi. In questo seminario, troveremo il luogo dei punti nella capitale dai quali si vedono i quattro camini spaziati in modo uniforme lungo l'orizzonte. La soluzione ci porta alla geometria proiettiva, lo studio di alcune coniche (iperbole ed ellissi), il birapporto definito da quattro punti oppure da quattro rette, e un teorema di Michel Chasles, il matematico francese conosciuto per la relazione per calcolare la somma di due vettori.

Prof. Alessandro Teta

Meccanica Quantistica e mondo macroscopico

La Meccanica Quantistica è una teoria di enorme successo che si applica sia al mondo microscopico (per es. agli atomi) che al nostro mondo macroscopico. Tuttavia, nella sua formulazione standard, la teoria incontra alcune difficoltà di tipo concettuale quando viene utilizzata per descrivere un comportamento classico in un dato sistema. Nel seminario si discute questo aspetto in una prospettiva storica e si analizza poi, in particolare, il caso della descrizione delle traiettorie classiche che emergono in un sistema quantistico sotto opportune condizioni.