MATEMATICA E CAOS

Un'introduzione ai sistemi dinamici discreti
e al caos deterministico

Andrea Bacciotti

Il punto di vista deterministico nella scienza

Pierre Simon de Laplace (1749-1827) ,
Saggio filosofico sulle probabilità, 1814

Il problema della stabilità del sistema solare

Equazioni del moto di n corpi, soggetti alla legge di gravitazione universale (Newton)

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{1}^{n} \frac{m_i m_j (x_i - x_j)}{|x_i - x_j|^3} \quad i \neq j, \quad x_i \in \mathbf{R}^3$$

Casi particolari: n=2 (leggi di Keplero), n=3 (problema dei tre corpi in generale, problema dei tre corpi ristretto)

Il premio del compleanno: Re Oscar II di Svezia, 1887
Commissione: Mittag-Leffler, Weierstrass, Hermite


Henry Poincaré

[F. Diacu, P. Holmes, *Celestial encounters*, Princeton 1996]

INDICE DEGLI ARGOMENTI

- Sistemi dinamici discreti del primo ordine: dinamica delle popolazioni e altri esempi
- Sistemi dinamici discreti del secondo ordine: numeri di Fibonacci)
- Sistemi dinamici sul cerchio: scala musicale secondo Pitagora
- Shift di Bernoulli
- Transizione al caos
- Metodi numerici iterativi

SISTEMI DINAMICI DISCRETI
(sistemi di equazioni alle differenze finite)

Esempio 1:
Andrea vuole comprare un cellulare nuovo, che costa E 119.99. Nel salvadanaio ha E. 42. Decide di mettere da parte E. 5 ogni settimana. Dopo quante settimane potrà comprare il cellulare?

$x_0 = 42$
$x_n =$ somma accantonata dopo n settimane ($n = 1, 2, \ldots$)

x_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) si dice una *successione*

Si ha

$$x_{n+1} = x_n + 5 \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

da cui

$$x_n = 42 + 5n \tag{2}$$

La soluzione si ottiene risolvendo la disequazione

$$42 + 5n > 119.99 \Longrightarrow n > 15.598...$$

cioè $n = 16$.

La relazione (1) è un esempio di *sistema dinamico discreto*

• x_0 si chiama *condizione o stato iniziale*
• la successione x_n si chiama *soluzione o traiettoria o orbita* generata da (1) in corrispondenza dello stato iniziale x_0 (si dice anche che x_n è definita per ricorrenza)
• per ogni x_0 si ha una e una sola soluzione

In questo caso, x_n è una *progressione aritmetica*.

Esempio 2: Legge di evoluzione di Malthus (1798)
In un ambiente circoscritto vive una specie di animali il cui numero è stimato in circa 50 esemplari. Si stima che qualora il loro numero crescesse oltre i 100 si avrebbe un danno per l'ambiente, mentre se scendesse al di sotto dei 20 esemplari la specie sarebbe a rischio estinzione. Si stima infine che, in condizioni "naturali" si abbia

tasso di mortalità annuale $d = 10\%(= \frac{1}{10})$

tasso di natalità annuale $b = 30\%(= \frac{3}{10})$

per cui

$$x_{n+1} = x_n + bx_n - dx_n = (1 + b - d)x_n = \frac{6}{5}x_n$$

$$x_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n \cdot x_0 = \left(\frac{6}{5}\right)^n \cdot 50$$

In questo caso abbiamo una *progressione geometrica*

Imponendo $x_n > 100$ e usando i logaritmi, si ha $n > 3.8$

A questo punto si decide di intervenire in modo da ridurre il tasso di natalità a $b = 5\%(= \frac{1}{20})$. Ripetendo il ragionamento si ottiene questa volta

$$x_{n+1} = \frac{19}{20} x_n$$

e

$$x_n = \left(\frac{19}{20}\right)^n \cdot 100$$

La popolazione comincerà ad avvicinarsi alla soglia di estinzione dopo circa 31 anni

Definizione

In generale, un *sistema dinamico discreto* del primo ordine è definito da una legge ricorsiva del tipo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale. Per ogni condizione iniziale x_0, viene generata (in modo unico) una successione x_n $(n = 0, 1, 2 \dots)$

Ci interessa studiare il comportamento asintotico, cioè il $\lim_{n\to\infty} x_n$

Generazione delle orbite

$x_1 = f(x_0)$,

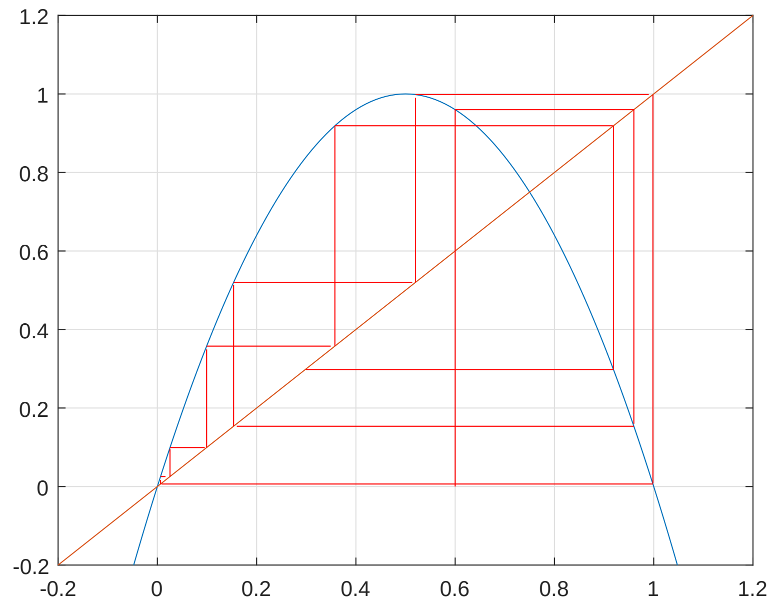
$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{[2]}(x_0)$, (funzione composta)

$x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))) = f^{[3]}(x_0)$

e così via. In generale, $x_n = f^{[n]}(x_0)$.

La funzione $f^{[n]}(x)$ sarà chiamata l'*iterata* n-esima

Per uniformità, $f^{[0]}(x) = x$, $f^{[1]}(x) = f(x)$



Metodo grafico per generare le orbite

Informazioni importanti sulle proprietà qualitative di un sistema dinamico sono fornite da certi punti particolari.

Punti fissi: sono le soluzioni dell'equazione

$$x = f(x)$$

Esempio: legge di evoluzione di Verhulst (1804-1849)

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$$

cioè $f(x) = 4x(1 - x)$ (mappa logistica), i cui punti fissi sono

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = 3/4$$

Si noti che l'intervallo $[0, 1]$ viene trasformato in se stesso.

Punti periodici

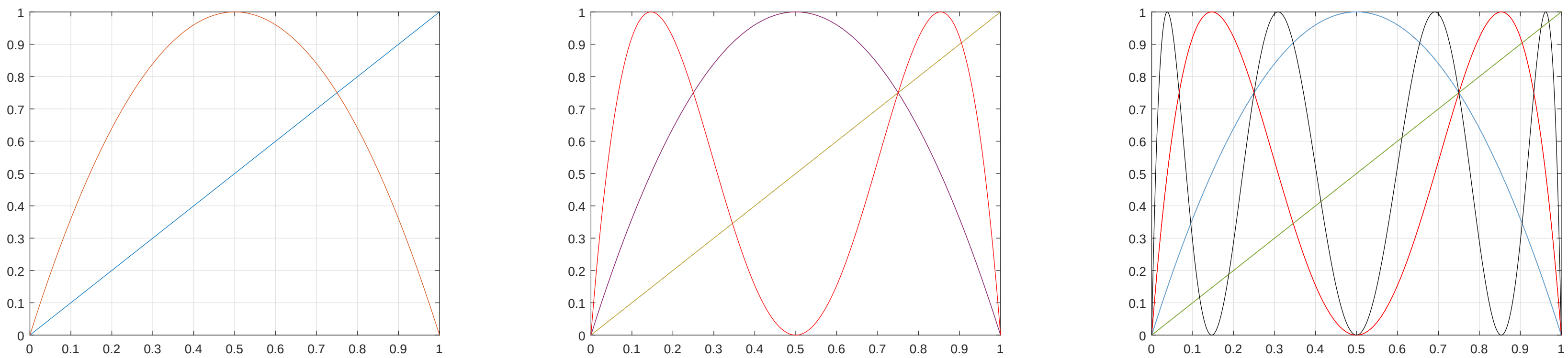
L'iterata seconda della mappa logistica è:

$$f^{[2]}(x) = 16x(1-x)(4x^2-4x+1)$$

Osservando il grafico, si osserva che $f^{[2]}(x)$ possiede due punti fissi in più:

$$x = \frac{5+\sqrt{5}}{8} = 0.904... \qquad x = \frac{5-\sqrt{5}}{8} = 0.345...$$

Questi punti sono *punti periodici* di ordine 2 di $f(x)$.



Mappa logistica: iterate, punti fissi e punti periodici

Ogni punto periodico di ordine 2 è anche periodico di ordine 4, 8, 16, ecc. ma, in generale, non è un punto periodico di ordine 3.

La mappa logistica <u>possiede</u> punti periodici di ordine 3

$\Longrightarrow$ possiede punti periodici di <u>qualunque</u> ordine! (Teorema di Sarkovskii)

I punti periodici sono “densi” in $[0, 1]$ (reali algebrici)

Inoltre, esistono punti x_0 non periodici, tali che l’orbita da essi generata è densa in $[0, 1]$

La mappa logistica ristretta all’intervallo $[0, 1]$ è un esempio di *caos deterministico.*

Una conseguenza sorprendente è il così detto *effetto farfalla* ($\sim$ 1960)

Edward Lorenz (1917 - 2008)

Punti fissi attrattivi (stabilità)

Un punto fisso $\bar{x}$ si dice attrattivo se $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ per ogni stato iniziale x_0 (o almeno, per tutti gli stati iniziali appartenenti ad un intervallo non degenere centrato in $\bar{x}$).

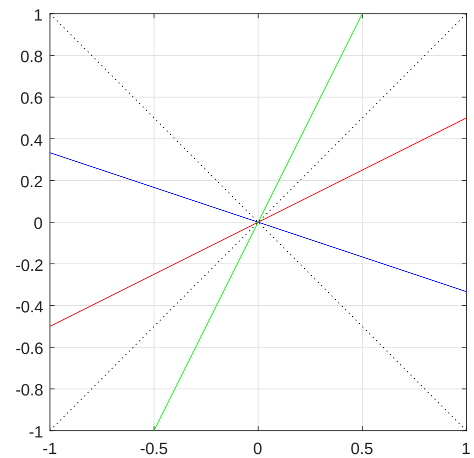
Esempio: sistemi lineari

$$x_{n+1} = ax_n$$

dove a è un numero reale dato (legge di proporzionalità diretta definita dalla funzione $f(x) = ax$).

- L'unico punto fisso è l'origine.
- Le soluzioni hanno la forma $x_n = a^n x_0$. Quindi, il punto fisso (l'origine) è attrattivo se e solo se $|a| < 1$.
- Se $a > 0$ le orbite hanno un andamento monotono, se invece $a < 0$ hanno un andamento oscillante.

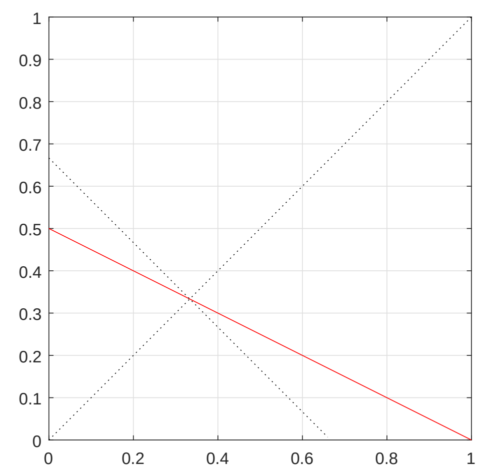
a è il coefficiente angolare della retta $y = f(x) = ax$



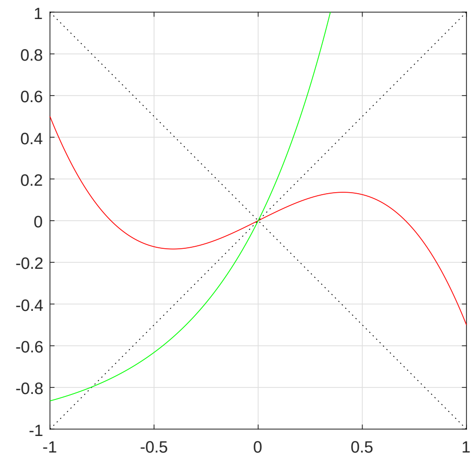
Esempio: come dividere un segmento in tre parti

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - x_n)$$

L'unico punto fisso è 1/3, ed è attrattivo.



Se $f(x)$ non è lineare la condizione di attrattività si può ancora verificare geometricamente. Tracciamo due rette ortogonali tra loro, passanti per il punto fisso e parallele alle bisettrici dei quadranti: si determinano in questo modo quattro settori. Il punto fisso è attrattivo se il grafico di $f(x)$ giace nei settori di destra e di sinistra.



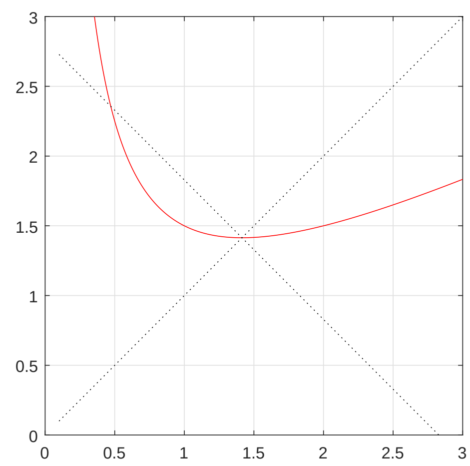
Esempio: l'algoritmo di Erone

Si consideri il sistema dinamico discreto definito dalla funzione

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

dove $a > 0$ è fissato, e x varia sui numeri positivi.

L'unico punto fisso è $x = \sqrt{a}$, e la condizione di attrattività è verificata ($x = \sqrt{a}$ è un punto di minimo per f) (vedi figura con $a = 2$)



Qualunque sia lo stato iniziale x_0, la soluzione x_n converge (e anche abbastanza rapidamente) alla radice quadrata di a. Per esempio, con $a = 2$:

$x_0 = 2$

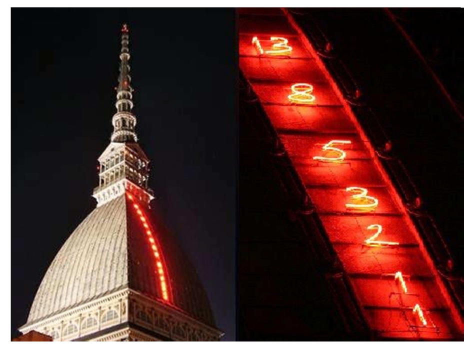
....

$x_5 = 1.414213562373095$

mentre $\sqrt{2} = 1.41421356237309504 88...$

SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

Successione di Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$



Leonardo Pisano, detto Fibonacci (1175 – 1235)

Problema dei conigli

Regola 1: ogni coppia di conigli impiega un anno per raggiungere l'età della riproduzione
Regola 2: all'inizio di ogni anno, ogni coppia che ha già raggiunto l'età della riproduzione almeno un anno prima, genera una (e una sola) coppia di conigli
Regola 3: l'allevatore inizia l'attività acquistando un'unica coppia di conigli neonati

anno 1	anno 2	anno 3	anno 4	anno 5
1	1	1	1	1
		1	1	1
			1	1
				2
1	1	2	3	5

Possiamo interpretare la successione di Fibonacci come generata dalla legge di evoluzione

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \tag{3}$$

con condizioni iniziali $x_0 = 1, x_1 = 1$. Si tratta di un sistema dinamico del <u>secondo ordine</u>.

Cambiando le condizioni iniziali, si ottengono altre successioni: per esempio con $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, si hanno i numeri di Lucas (E. Lucas, 1842-1891) $1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$ che corrispondono al problema dei conigli con la Regola 3 modificata nel modo seguente: all'inizio del secondo anno di attività, l'allevatore decide di acquistare altre due coppie di conigli neonati

anno 1	anno 2	anno 3	anno 4	anno 5
1	1	1	1	1
	2	2	2	2
		1	1	1
			1	1
				4
1	3	4	7	11

È noto (Keplero) che per la successione (originale) di Fibonacci,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618...$$

Questo numero è uguale alla costante aurea, cioè la soluzione del problema: *dato un segmento di lunghezza 1, determinare la lunghezza a del segmento tale che*

$$1 : a = a : (a+1)$$

(qualcuno chiama costante aurea il reciproco di $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, che è uguale a $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.618...$)

È meno noto che lo stesso è vero per (quasi) tutte le successioni generate dalla (3). Cerchiamo di capire perché.

Ricordando che la forma generale della successione generata da un sistema lineare del primo ordine è $x_n = a^n x_0$, è naturale aspettarsi che anche la (3) ammetta soluzioni di questo tipo. Ma, quale valore assegnare ad a?

Per sostituzione, si ha

$$a^{n+2}x_0 - a^{n+1}x_0 - a^n x_0 = 0$$

e, semplificando,

$$a^2 - a - 1 = 0$$

(equazione caratteristica) dalla quale si ricavano i due valori $a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618...$ e $a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618...$

Si noti che il primo è positivo e maggiore di 1, il secondo è negativo e minore di uno.

La soluzione generale della (3) si ottiene combinando queste due soluzioni fondamentali mediante costanti arbitrarie:

$$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Per esempio

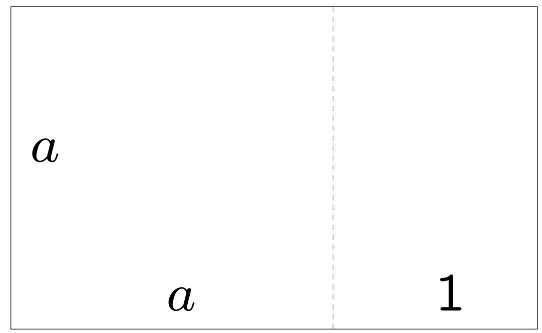
$$\frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

produce, per $n = 0, 1, 2...$ la successione originale di Fibonacci.

Si osserva che:

$\circ$ comunque si scelgano c_1, c_2, purché $c_1 \neq 0$, la soluziione diverge, e si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(la coppia (x_n, x_{n+1}) tende ad allinearsi lungo la retta di coefficiente angolare $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$)
$\circ$ se $c_1 = 0$, comunque si scelga c_2, la soluzione tende a zero oscillando

Ne concludiamo che la costante aurea è una caratteristica NON della successione di Fibonacci, ma del sistema dinamico che la genera.



D'altra parte, la relazione di proporzionalità

$$1 : a = a : (a + 1)$$

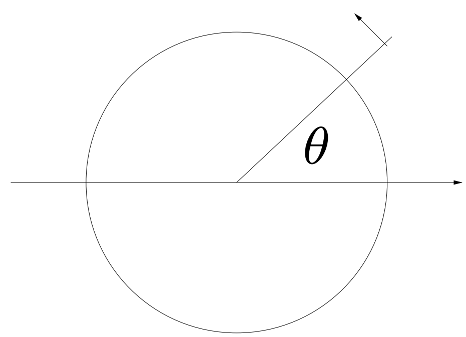
è equivalente all'equazione

$$a^2 - a - 1 = 0$$

che coincide con l'equazione caratteristica del sistema (3).

SISTEMI SUL CERCHIO: Uno strano orologio

Consideriamo una circonferenza S (la lunghezza del raggio è irrilevante) sulla quale siano fissati un'origine e un senso di rotazione. Ogni punto sulla circonferenza individua un angolo e viceversa.



Il numero reale θ rappresenta un angolo (misurato in radianti) a meno di giri completi.

Introduciamo la notazione (relazione di equivalenza)

$$\theta_2 = \theta_1 \text{mod}\,(2\pi)$$

se esiste un numero $k \in \mathbf{Z}$ tale che $\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$

Sia $\alpha > 0$ fissato. Definiamo il sistema dinamico

$$\theta_{n+1} = (\theta_n + \alpha)\text{mod}\,(2\pi)$$

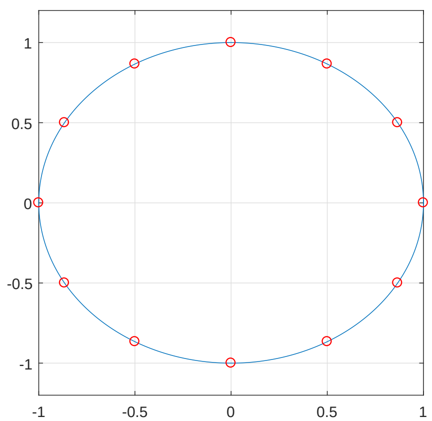
le cui soluzioni hanno la forma $\theta_n = (\theta_0 + n\alpha)$ mod$\,(2\pi)$.

La loro evoluzione dipende, qualitativamente, dalla natura di α:

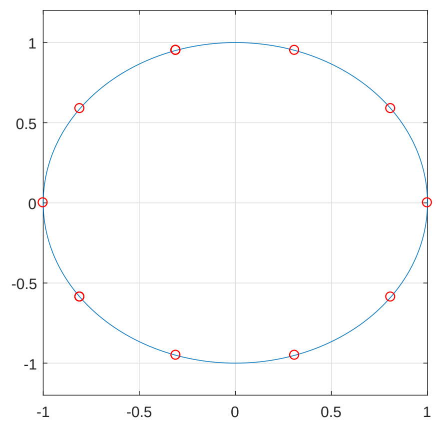
• se $\alpha = 2\pi/q$ con $q \in \mathbf{N}$, dopo q iterazioni si torna esattamente nell'origine: tutti i punti sono periodici di periodo q

• se $\alpha = 2p\pi/q$ con $p, q \in \mathbf{N}$ (relativamente primi), tutti i punti sono periodici di periodo q, ma per tornare all'origine bisogna fare p giri

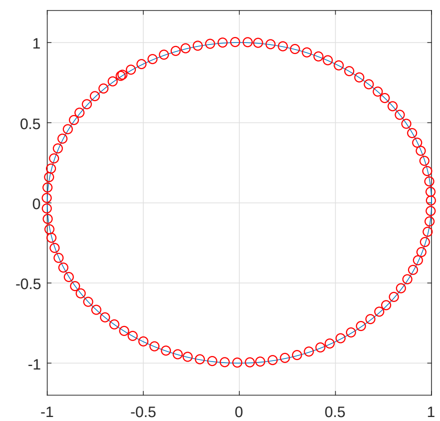
• se $\alpha/2\pi$ non è un numero razionale, non esistono punti periodici, e i punti della successione θ_n sono "densi" in S, qualunque sia lo stato iniziale.



$p/q = 1/12$



$p/q = 3/10$



$p/q = 1/(2\sqrt{2})$

La scala musicale secondo Pitagora

Oggi sappiamo che i suoni si trasmettono attraverso onde. La sensazione del suono dipende dalla forma dell'onda: in particolare, dalla frequenza.

La frequenza si misura in Hertz: per esempio, secondo la convenzione ISO in vigore dal 1953, la frequenza del LA della quarta ottava è 440Hz.

Pitagora aveva capito tre cose fondamentali:

1) il nostro orecchio percepisce come “uguali” gli intervalli tra due suoni se sono uguali i rapporti tra le loro frequenze (non le differenze), cioè

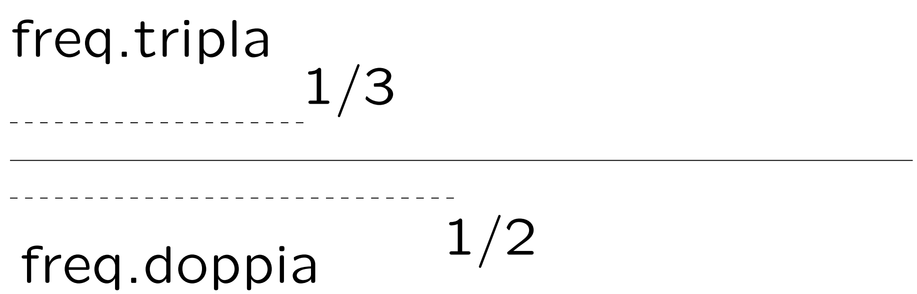
$$[\omega_1, \omega_2] \text{ “uguale“ } [\omega_1', \omega_2'] \iff \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1'}{\omega_2'}$$

2) non tutte le sequenze di suoni sono “gradevoli” all’udito

3) raddoppiando la frequenza, si ottiene un suono più acuto ma la sensazione è la stessa

Pitagora realizza il primo tentativo di formalizzare l'espressione musicale basandosi sul concetto di "ottava" (rapporto 2) e di "quinta" (rapporto 1/3).

Regola. Dato un suono di frequenza ω, si comincia determinando un altro suono di frequenza 3ω. Questo nuovo suono "esce" fuori dall'ottava (confinata all'intervallo $[\omega, 2\omega]$): per riportarlo all'interno dell'ottava, si divide la frequenza per 2. Si procede ricorsivamente (talvolta bisogna dividere per 4).

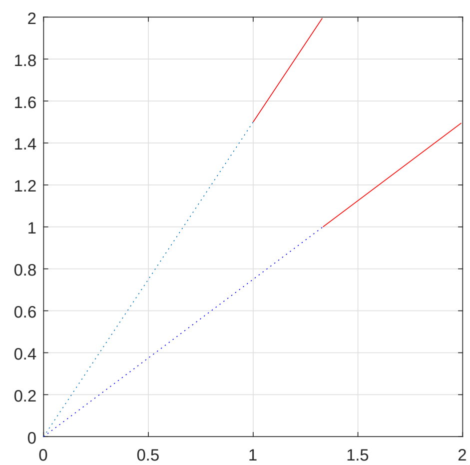


La regola di Pitagora si può interpretare come un sistema dinamico

$$\omega_{n+1} = f(\omega_n)$$

dove $f(\omega) : [1,2] \to [1,2]$ è definita come

$$f(\omega) = \begin{cases} \frac{3}{2}\,\omega & \text{se } 1 \leq \omega < \frac{4}{3} \\ \\ \frac{3}{4}\,\omega & \text{se } \frac{4}{3} \leq \omega \leq 2 \end{cases}$$



La discontinuità può essere formalmente eliminata introducendo la relazione di equivalenza

$$b = a \;\mathsf{pow}\,(2) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} \text{ tale che } \frac{b}{a} = 2^k$$

e riscrivendo il sistema come

$$\omega_{n+1} = \left(\frac{3}{2}\,\omega_n\right)\;\mathsf{pow}\,(2)$$

Le soluzioni hanno comunque la forma $\omega_n = \frac{3^n}{2^k}\,\omega_0$, con $k \geq n$.

Applichiamo la trasformazione $\theta = 2\pi \log_2 \omega$. Si ha

$$\theta_n = n(2\pi \log_2 3) + \theta_0 - 2k\pi$$

che si riporta alla mappa sulla circonferenza, con

$$\alpha = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}$$

numero irrazionale!

In particolare, $\omega_{12} \neq 2\omega_0$ (comma pitagorico: differenza circa 7.1 Hz, rapporto circa 1.0136)

La scala temperata

Per ovviare a questo inconveniente, si tentarono varie correzioni (buon temperamento), finché non fu sviluppato il *temperatamento equabile*: un percorso non facile, molto contrastato, durato vari secoli.

Tra una frequenza e il suo doppio gli intervalli sono tutti "uguali" e si ottengono per progressione geometrica

$$\omega_{n+1} = \sqrt[12]{2} \cdot \omega_n$$

scala	DO	RE♭	RE	MI♭	MI	FA	SOL♭
pitagorica	260.7407	278.4375	293.3333	313.2422	330	347.6543	371.2500
temperata	261.6256	277.1826	293.6648	311.1270	329.6276	349.2282	369.9944

scala	SOL	LA♭	LA	SI♭	SI	DO+	2DO
pitagorica	391.1111	417.6563	440	469.8633	495	528.5962	(521.4815)
temperata	391.9954	415.3047	440	466.1638	493.8833	523.2511	(523.2511)

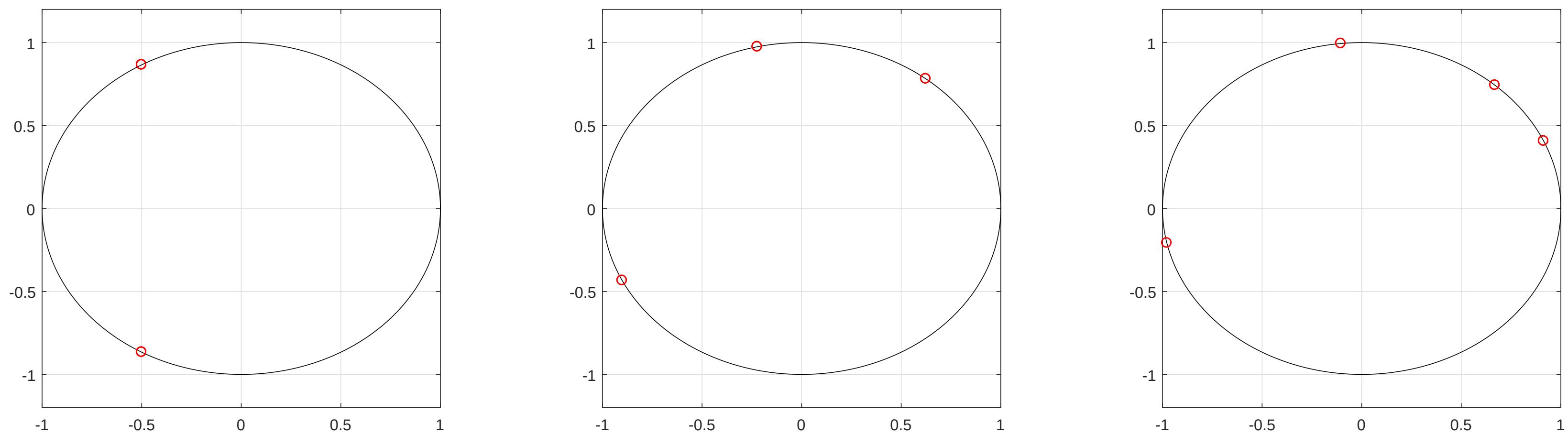
Un orologio ancora più strano

Consideriamo il sistema dinamico

$$\theta_{n+1} = 2 \cdot \theta_n \mod (2\pi)$$

Vi è un unico punto fisso ($\theta = 0$) e le soluzioni hanno la forma $\theta_n = 2^n \cdot \theta_0 \mod (2\pi)$.

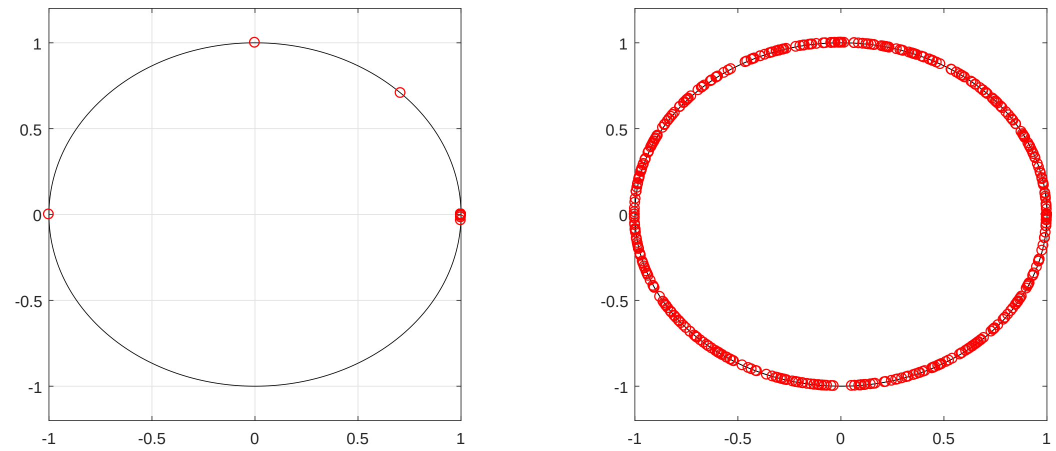
Come nel caso della mappa logistica, si hanno infiniti punti periodici, densi sulla circonferenza. Per esempio:



$\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$, periodo 2 $\quad$ $\theta_0 = \frac{2\pi}{7}$, periodo 3 $\quad$ $\theta_0 = \frac{2\pi}{15}$, periodo 4

e, in generale, $\theta_0 = \frac{2k\pi}{2^{n-1}}$, periodo n

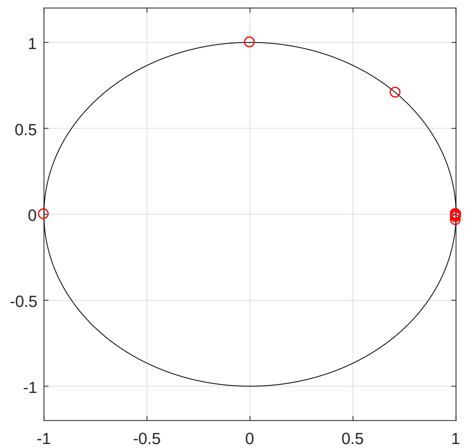
Inoltre, vi sono infinite soluzioni, ciascuna delle quali densa sulla circonferenza.



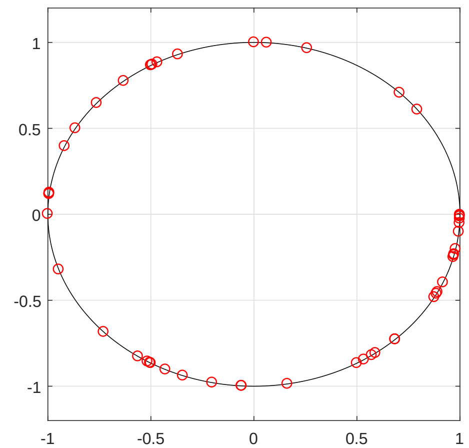
$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} = 0.78539... \text{ (50 iterazioni, 500 iterazioni)}$$

Questo "orologio" è caotico (questo sistema e quello generato dalla mappa logistica sono, in un certo senso, lo "stesso" sistema)

Effetto farfalla (sensibilità rispetto ai dati iniziali)



$\theta_0 = \frac{\pi}{4} = 0.78539...$



$\theta_0 = \frac{\pi}{4} = 0.785$

(50 iterazioni)

SHIFT DI BERNOULLI (Jakob Bernoulli, 1654-1705)

Sia Σ l'insieme costituito da tutte le stringhe bi-infinite e centrate che assumono valori nell'insieme $\{0,1\}$. Per indicare un generico elemento di Σ, scriveremo

$$A = (\dots, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, a_2, \dots)$$

a_0 si dice l'elemento centrale della stringa A. Si noti l'importanza dell'elemento centrale: per esempio

$$(\dots, 0, 1, 0; 1, 0, 1, 0 \dots) \neq (\dots, 0, 1, 0, 1; 0, 1, 0 \dots)$$

Indichiamo la stringa finita di ampiezza K

$$I_{(A,K)} = (a_{-K}, \ldots, a_{-1}; a_0, a_1, \ldots a_{-K})$$

Stabiliamo un criterio per "misurare" la distanza tra due stringhe $A, B \in \Sigma$.

- $d(A, B) = 1$ se $a_0 \neq b_0$
- $d(A, B) = \frac{1}{2^{K+1}}$ se K è il massimo intero t.c. $I_{(A,K)} = I_{(B,K)}$
- $d(A, B) = 0$ se $A = B$

Definiamo la mappa di shift (destro) $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ come

$$\sigma((\ldots, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, a_2, \ldots)) = (\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0; a_1, a_2, \ldots)$$

ovvero $B = \sigma(A) \Longleftrightarrow b_k = a_{k+1}$, per ogni $k \in \mathbf{Z}$

e consideriamo il sistema dinamico discreto su Σ

$$A_{n+1} = \sigma(A_n)$$

Le soluzioni sono successioni di stringhe $A_0, A_1, A_2, \ldots$.
Per esempio, se $A_0 = (\ldots, 0, 0; 1, 1, 1, \ldots)$, allora
$A_2 = (\ldots, 0, 0, 1, 1; 1, 1, \ldots)$

Proprietà

∘ il sistema ha due e solo 2 punti fissi: la stringa in cui tutti gli elementi sono zero e la stringa in cui tutti gli elementi sono uno

∘ il sistema ha soluzioni periodiche di qualunque periodo. Per esempio

$(\ldots, 0, 1, 0; 1, 0, 1, 0 \ldots)$ ha periodo 2

$(\ldots, 0, 1, 1, 0, 1, 1; 0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots)$ ha periodo 3 ecc.

∘ il sistema ammette una soluzione “densa”.

Costruzione di una soluzione densa.

$$A_0 = (\ldots, 0, 0, 0;\quad \underbrace{0,\ 1}_{\text{lunghezza } 1}\quad ,\ \underbrace{0, 0,\ 0, 1,\ 1, 0,\ 1, 1}_{\text{lunghezza } 2},\ \ldots)$$

A_0 contiene un modello dell'intervallo $I_{(A,K)}$ di qualunque stringa A qualunque sia K.

La mappa σ è caotica. Si noti che σ è invertibile (al contrario della logistica e della mappa sul cerchio).

Σ si può interpretare come lo spazio degli eventi possibili relativi all'esperimento: *infiniti lanci di una moneta*

Il sistema dinamico discreto può simulare, attraverso un procedimento deterministico, il risultato di un esperimento aleatorio.

Transizione al caos (accumulo di biforcazioni)

Il comportamento della mappa logistica

$$x_{n+1} = mx_n(1 - x_n)$$

dipende dal valore del parametro $m > 0$.

$m = 1$
unico punto fisso $x = 0$, attrattivo per le soluzioni positive (estinzione)

$m = 3/2$
due punti fissi: $x = 0$ (repulsivo), $x = 1/3$ attrattivo (equilibrio ecologico; le soluzioni convergono in maniera monotona)

$m = 5/2$
due punti fissi: $x = 0$ (repulsivo), $x = 3/5$ attrattivo (equilibrio ecologico; le soluzioni convergono oscillando)

$m = 16/5$
due punti fissi: $x = 0$, $x = 11/16$ entrambi repulsivi; è comparsa una soluzione periodica di periodo 2

$m = 4$
sistema caotico

I valori del parametro in corrispondenza dei quali si registra un cambiamento qualitativo del comportamento dinamico del sistema si dicono *valori di biforcazione*. Nel caso della mappa logistica, valori di biforcazione si hanno per esempio per $m = 1$, $m = 3$. La biforcazione successiva si ha per
$m = 1 + \sqrt{6} = 3.449...$
(comparsa di una soluzione di periodo 4).

Quando m varia in maniera continua tra 1 e 4, avvengono infinite biforcazioni che complicano progressivamente la dinamica, fino al raggiungimento del caos.