

MATEMATICA E SOCIETÀ

La matematica: è un'opinione?

F. Ceragioli, B. Franci, L. Zino

DISMA, POLITO

13-14 Giugno, 2017

Il linguaggio matematico

[dalla presentazione del prof. Rondoni]

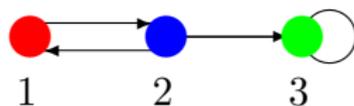
- ▶ intrinseca imprevedibilità del comportamento dei sistemi naturali: c'è possibilità di dialogo fra scienza e altre realtà?
- ▶ linguaggio aiuta a comprendere le relazioni fra le cose, a scoprire ed esprimere l'unità sottostante alla varietà, senza pretendere di diventare "deterministi assoluti"

Le reti di comunicazione: i grafi

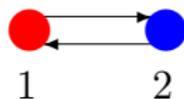
Grafo \mathcal{G} : è formato da un insieme di **nodi**, denominati con numeri naturali consecutivi $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ed un insieme di **archi** \mathcal{E} , ciascuno formato da una coppia ordinata di nodi (i, j) , il cui scopo è indicare se vi è un collegamento da i a j .

Matrice di adiacenza A : per rappresentare in modo compatto \mathcal{G} . È una matrice quadrata $n \times n$, dove nella posizione corrispondente all' i -esima riga e j -esima colonna vi è 1 se $(i, j) \in \mathcal{E}$, 0 altrimenti. Ad esempio $\mathcal{V} = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{E} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 3)\}$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Nota:



si indica



Grafi connessi

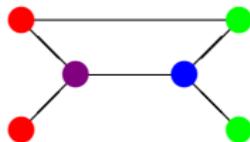
Cammino su un grafo: è un elenco ordinato di nodi tale che tra ciascun nodo e il suo successivo nel cammino è presente un arco.

Circuito: è un cammino dove primo ed ultimo nodo coincidono.

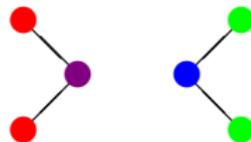
Lunghezza di un cammino e di un circuito: è data dal numero di archi percorsi.

Grafo connesso: per ogni coppia di nodi esiste un cammino che li collega.

Grafo connesso



Grafo non connesso

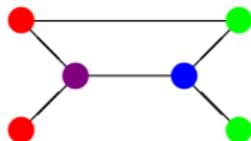


Grafi aperiodici

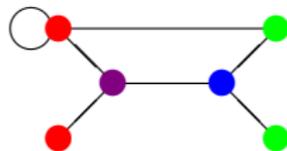
Il **periodo** di un nodo è il massimo comun divisore delle lunghezze di tutti i circuiti che passano per il nodo. Se il grafo è connesso, tutti i nodi hanno lo stesso periodo.

Se il periodo è 1 il grafo è detto **aperiodico**.

Periodo 2



Periodo 1: grafo aperiodico



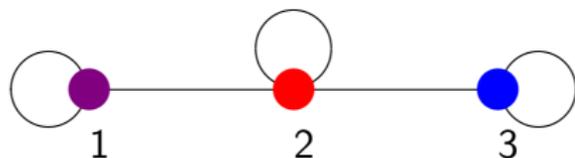
OBIETTIVO: studiare l'evolversi delle opinioni al variare del tempo

INGREDIENTI

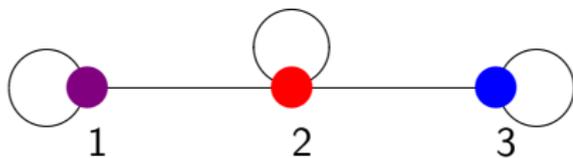
- ▶ gli individui: $1, \dots, n$
- ▶ le opinioni: $x_i \in \mathbb{R}$ opinione dell'individuo i
- ▶ la rete di comunicazione: il grafo
- ▶ il tempo: $k \in \mathbb{N}$ (tempo discreto!)

3 individui in fila

OPINIONI INIZIALI: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$



$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{2}{3}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) \\ x_2(k+1) = \frac{1}{3}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{3}x_3(k) \\ x_3(k+1) = \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{2}{3}x_3(k) \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{2}{3}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) \\ x_2(k+1) = \frac{1}{3}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{3}x_3(k) \\ x_3(k+1) = \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{2}{3}x_3(k) \end{cases}$$

$$x(k+1) = Wx(k)$$

Esercizi

ESERCIZIO 1

Fissati i valori $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0$ calcolare

$$x_1(1), x_2(1), x_3(1)$$

$$x_1(2), x_2(2), x_3(2)$$

$$x_1(3), x_2(3), x_3(3).$$

ESERCIZIO 2

Sia data la matrice $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

- ▶ Disegnare il grafo sottostante: se il numero nella posizione (i, j) è positivo allora i è influenzato j (c'è un arco da i a j).
- ▶ Scrivere le equazioni $x(k+1) = Wx(k)$.
- ▶ Fissati i valori $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0$, calcolare $x_1(3), x_2(3), x_3(3)$.

Le opinioni si attraggono

In generale se $W = (w_{ij})$, con $0 \leq w_{ij} \leq 1$, $w_{i1} + w_{i2} + \dots + w_{in} = 1$,

$$x_i(k+1) = w_{i1}x_1(k) + w_{i2}x_2(k) + \dots + w_{in}x_n(k)$$

cioè l'opinione di un individuo è la media (pesata) delle opinioni dei vicini.

In particolare

- ▶ i non è influenzato da j : $w_{ij} = 0$
- ▶ i del tutto influenzabile: $w_{ii} = 0$
- ▶ i testardo: $w_{ii} = 1$.

Grafi e comportamento asintotico

Come l'andamento delle opinioni nel tempo dipende dal grafo che rappresenta la rete di comunicazione?

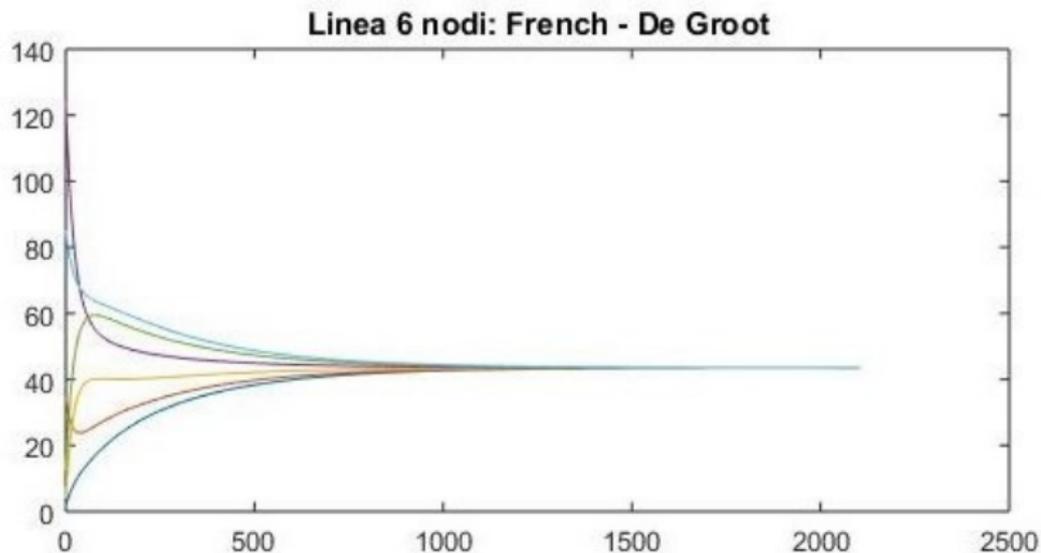
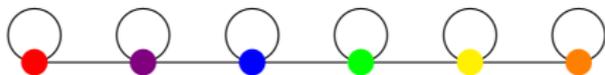
TEOREMA

Sia il grafo di comunicazione connesso.

Le opinioni si avvicinano tutte ad uno stesso valore se e solo se il grafo è aperiodico.

IMPORTANTE: Le proprietà del grafo si traducono in proprietà della matrice W (\rightarrow algebra lineare).

6 individui su una linea



Altri problemi

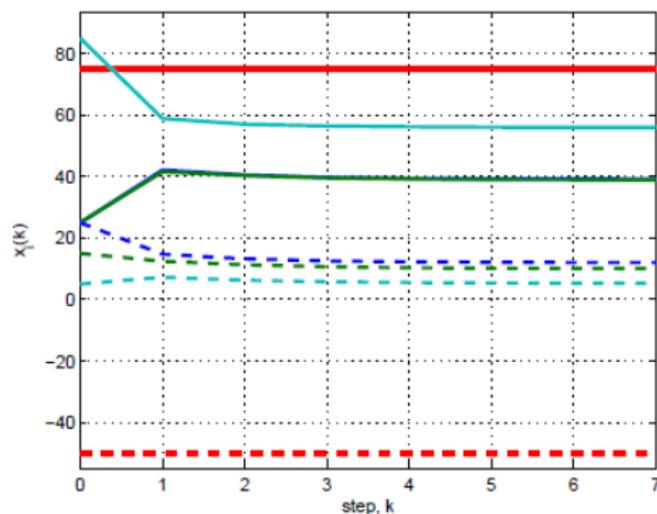
- ▶ calcolo valore a cui le opinioni si avvicinano, se c'è
- ▶ tempo di convergenza
- ▶ ruolo di ciascun nodo su andamento opinioni

Come si spiega il disaccordo?

PREGIUDIZIO

L'evoluzione dell'opinione di ciascun individuo tiene conto dell'opinione iniziale dell'individuo.

$$x_i(k+1) = \lambda_i[w_{i1}x_1(k) + w_{i2}x_2(k) + \dots + w_{in}x_n(k)] + (1 - \lambda_i)x_i(0)$$

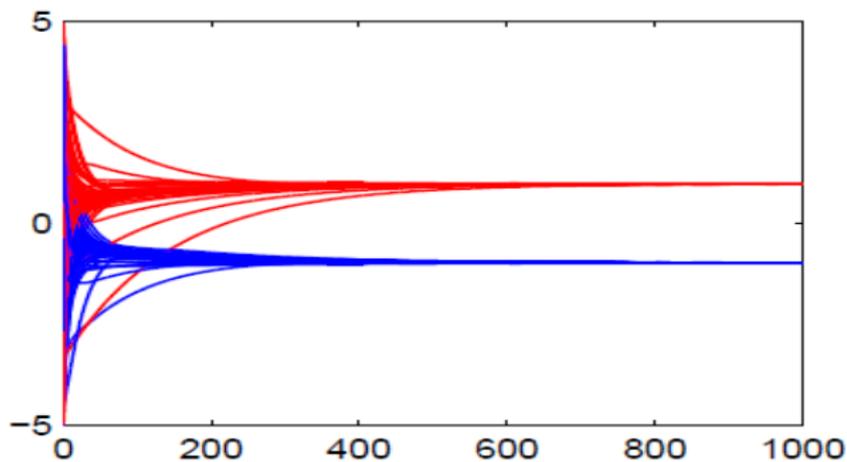


REPULSIONE

Gruppi diversi di individui possono interagire negativamente.

Due gruppi $A = \{1, 2, \dots, p\}$, $B = \{p + 1, \dots, n\}$

$$i \in A : x_i(k+1) = w_{i1}x_1(k) + \dots + w_{ip}x_p(k) - w_{i(p+1)}x_{p+1}(k) \dots - w_{in}x_n(k)$$



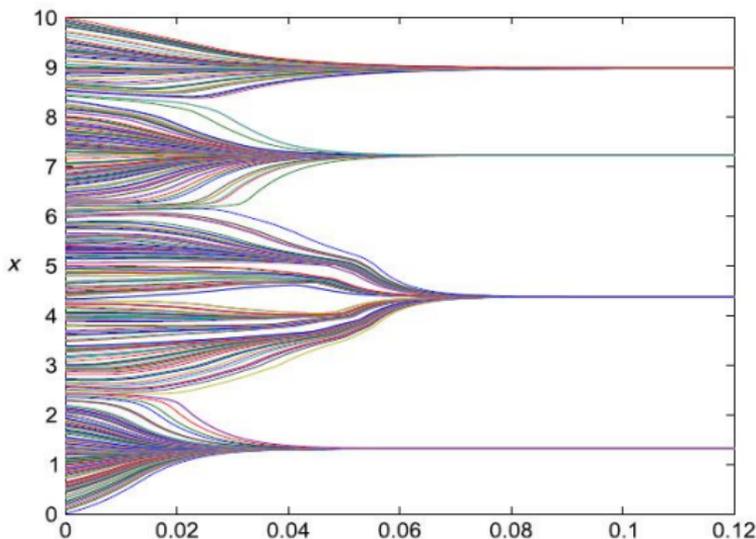
FIDUCIA LIMITATA

Ogni individuo si fida solo di chi ha opinioni non lontane dalle sue.

j è vicino di i al tempo k se $|x_j(k) - x_i(k)| \leq 1$,

insieme dei vicini di i al tempo k : $\{j_1, \dots, j_r\}$

$$x_i(k+1) = w_{ij_1}x_{j_1}(k) + \dots + w_{ij_r}x_{j_r}(k)$$



Problemi vari - stessa matematica

- ▶ Google: page rank
- ▶ reti di sensori
- ▶ reti energetiche
- ▶ moti gruppi di animali
- ▶ moti coordinati robot